ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА ПО НАДЗОРУ В СФЕРЕ ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ»

Методические материалы для председателей и членов предметных комиссий субъектов Российской Федерации по проверке выполнения заданий с развёрнутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ 2024 года

МАТЕМАТИКА

Москва
2024

Руководитель комиссии по разработке контрольных измерительных материалов, используемых при проведении государственной итоговой аттестации по образовательным программам основного общего и среднего общего образования по математике, И.В. Ященко, в.н.с. Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный институт педагогических измерений».
Авторы: И.В. Ященко, И.Р. Высоцкий, А.В. Семенов, А.С. Трепалин, М.А. Черняева.

Методические материалы для председателей и членов предметных комиссий субъектов Российской Федерации по проверке выполнения заданий с развёрнутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ 2024 г. по математике подготовлены в соответствии с Тематическим планом работ федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный институт педагогических измерений». Пособие предназначено для подготовки экспертов по оцениванию выполнения заданий с развёрнутым ответом, которые являются частью контрольных измерительных материалов (КИМ) для сдачи единого государственного экзамена (ЕГЭ) по математике профильного уровня.

В методических материалах характеризуются типы заданий с развёрнутым ответом, используемые в КИМ ЕГЭ по математике, и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом, приводятся примеры оценивания выполнения заданий и даются комментарии, объясняющие выставленную оценку.

В пособии использованы работы участников ЕГЭ 2017–2023 гг.

Авторы будут благодарны за замечания и предложения по совершенствованию пособия.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Общие позиции и характер оценивания выполнения заданий в целом повторяют прошлогодние. Небольшие видоизменения и корректировки формулировок в содержании критериев оценивания для конкретного задания могут иметь место в тех случаях, когда необходимость подобного рода уточнений диктуется содержанием и структурой самого задания.

Более подробное описание заданий с развёрнутым ответом и критериев оценивания их выполнения представлены ниже, в начале каждого из параграфов 1–7.

Извлечения из Методических рекомендаций Рособрнадзора по формированию и организации работы предметных комиссий субъекта Российской Федерации при проведении государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования должна быть растяжка по странице

Во время работы экспертам запрещается:

- иметь при себе средства связи, фото-, аудио- и видеоаппаратуру;
- копировать и выносить из помещений, в которых работает ПК, экзаменационные работы, критерии оценивания, протоколы проверки экзаменационных работ;
- разглашать информацию, содержащуюся в указанных материалах.

Также запрещается:

- без уважительной причины покидать аудиторию;
- переговариваться с другими экспертами ПК, если речь не идёт о консультировании с председателем ПК или с экспертом ПК, назначенным по решению председателя ПК консультантом.

Если у эксперта возникают вопросы или проблемы, он должен обратиться к председателю ПК или лицу, назначенному председателем ПК консультантом.

1. Критерии проверки и оценка решений задания 13

Задание № 13 — тригонометрическое, логарифмическое или показательное уравнение.

Выделение решения уравнения в отдельный пункт *а* прямо указывает участникам экзамена на необходимость полного решения предложенного уравнения: при отсутствии в тексте конкретной работы ответа на вопрос пункта *а* задание № 13 оценивается 0 баллов.

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Комментарий.

Ответ в задании с развёрнутым ответом — это решение и вывод (называемый ответом).

Задача 13 (демонстрационный вариант ЕГЭ 2024 г.)

а) Решите уравнение

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos 2x=\sqrt{3}\cos x+1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$.

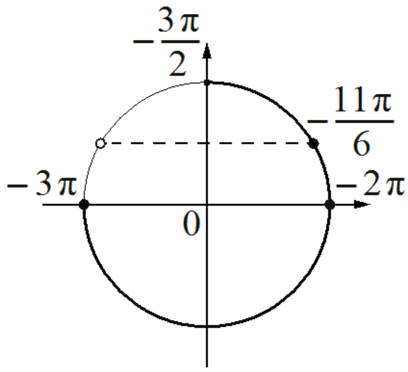
Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$\sin x+\sqrt{3}\cos x+1-2\sin^2 x=\sqrt{3}\cos x+1;\ \sin x-2\sin^2 x=0;$$
$$\sin x\cdot(2\sin x-1)=0.$$

Значит, $\sin x=0$, откуда $x=\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, или $\sin x=\frac{1}{2}$, откуда $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, или $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$.



Получим числа: -3π; -2π; $-\frac{11\pi}{6}$.

Ответ: а) πk, $k\in\mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$;

$\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$;

б) -3π; -2π; $-\frac{11\pi}{6}$.

Комментарий.

Множество корней может быть записано по-другому.

Отбор корней может быть произведён любым другим способом: с помощью графика, решения двойных неравенств и т.п.

При отборе корней с помощью числовой (тригонометрической) окружности на числовой окружности должно быть: отмечены и обозначены концы числового отрезка, выделена дуга, отмечены и обозначены корни, принадлежащие данному отрезку. На окружности могут быть отмечены вспомогательные числа, принадлежащие числовому отрезку.

Задание 13.1

а) Решите уравнение $\sin x \cdot \cos 2x + \sqrt{2}\cos^2 x + \sin x = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Решение.

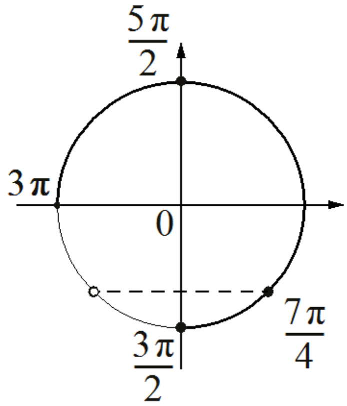
а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$2\sin x \cdot \cos^2 x - \sin x + \sqrt{2}\cos^2 x + \sin x = 0;\ 2\sin x \cdot \cos^2 x + \sqrt{2}\cos^2 x = 0;$$

$$\cos^2 x \cdot \left(2\sin x + \sqrt{2}\right) = 0.$$

Значит, $\cos x = 0$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, или $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, или $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.



Получим числа: $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{2}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$;

б) $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{2}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задание 13.2

а) Решите уравнение $\sin 2x + 2\sin(-x) + \cos(-x) - 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение.

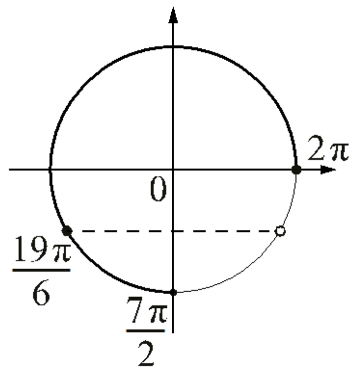
а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$2\sin x \cdot \cos x - 2\sin x + \cos x - 1 = 0;\ (\cos x - 1)(2\sin x + 1) = 0.$$

Значит, $\cos x = 1$, откуда $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, или $\sin x = -\frac{1}{2}$, откуда $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, или $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Получим числа: 2π; $\frac{19\pi}{6}$.



Ответ: а) $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) 2π; $\frac{19\pi}{6}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задание 13.3

а) Решите уравнение $\cos 2x + 2 = \sqrt{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

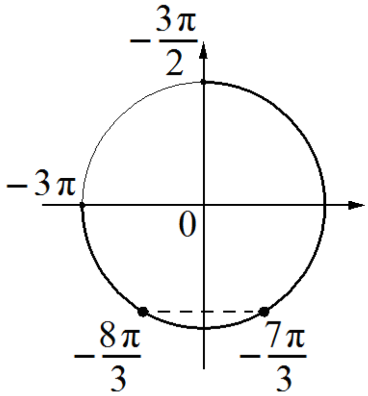
$$1 - 2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x + 2 = 0;\ \left(2\sin x + \sqrt{3}\right)\left(\sin x - \sqrt{3}\right) = 0.$$

Значит, $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, или $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Уравнение $\sin x = \sqrt{3}$ корней не имеет.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Получим числа: $-\frac{8\pi}{3}$; $-\frac{7\pi}{3}$.



Ответ: а) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{8\pi}{3}$; $-\frac{7\pi}{3}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задание 13.4

а) Решите уравнение $9\cdot 81^{\cos x}-28\cdot 9^{\cos x}+3=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\,4\pi\right]$.

Решение.

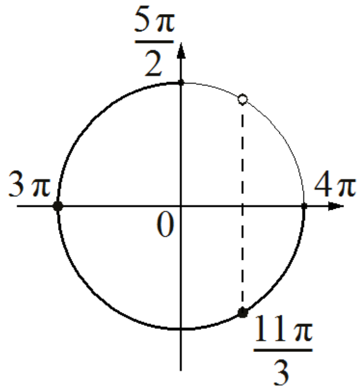
а) Пусть $t=9^{\cos x}$, тогда уравнение запишется в виде $9t^2-28t+3=0$, откуда $t=\frac{1}{9}$ или $t=3$.

При $t=\frac{1}{9}$ получим: $9^{\cos x}=\frac{1}{9}$; $\cos x=-1$, откуда $x=\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

При $t=3$ получим: $9^{\cos x}=3$; $\cos x=\frac{1}{2}$, откуда $x=\frac{\pi}{3}+2\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$, или $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\,4\pi\right]$.

Получим числа: 3π; $\frac{11\pi}{3}$.



Ответ: а) $\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{3}+2\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) 3π; $\frac{11\pi}{3}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задание 13.5

а) Решите уравнение $2\log_4^2(4\sin x) - 5\log_4(4\sin x) + 2 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Решение.

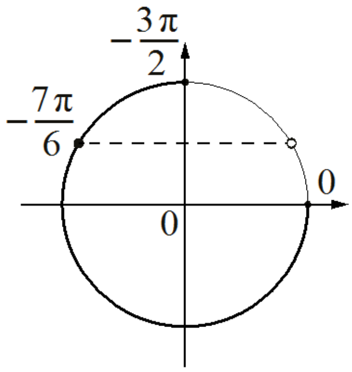
а) Пусть $t = \log_4(4\sin x)$, тогда исходное уравнение запишется в виде $2t^2 - 5t + 2 = 0$, откуда $t = 2$ или $t = \frac{1}{2}$.

При $t = 2$ получим: $\log_4(4\sin x) = 2$, значит, $\sin x = 4$, что невозможно.

При $t = \frac{1}{2}$ получим: $\log_4(4\sin x) = \frac{1}{2}$, значит, $\sin x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Получим число $-\frac{7\pi}{6}$.



Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{6}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Примеры оценивания решений задания 13

Пример 13.1.1

а) Решите уравнение $\sin x\cdot\cos 2x+\sqrt{2}\cos^2 x+\sin x=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2};3\pi\right]$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $-\dfrac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $-\dfrac{3\pi}{4}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$; б) $\dfrac{3\pi}{2}$; $\dfrac{7\pi}{4}$; $\dfrac{5\pi}{2}$.

№13.

а) $\sin x\cdot \cos 2x+\sqrt{2}\cos^2 x+\sin x=0$.

Используем формулу $\cos 2x = 1-2\sin^2 x$, а также основное тригонометр. тождество: $\sin^2 x+\cos^2 x=1 \Rightarrow \cos^2 x = 1-\sin^2 x$

Получим: $\sin x\cdot(1-2\sin^2 x)+\sqrt{2}(1-\sin^2 x)+\sin x=0$

$\underline{\sin x}-2\sin^3 x+\sqrt{2}-\sqrt{2}\sin^2 x+\underline{\sin x}=0$

$\underline{-2\sin^3 x}-\sqrt{2}\sin^2 x+\underline{2\sin x}+\underline{\sqrt{2}}=0$

Сгруппируем: $\sin^2 x(-2\sin x-\sqrt{2})+(2\sin x+\sqrt{2})=0$

$-\sin^2 x(2\sin x+\sqrt{2})+(2\sin x+\sqrt{2})=0$

$(2\sin x+\sqrt{2})(1-\sin^2 x)=0$

$(2\sin x+\sqrt{2})(1-\sin x)(1+\sin x)=0$

$2\sin x+\sqrt{2}=0$ или $1-\sin x=0$ или $1+\sin x=0$

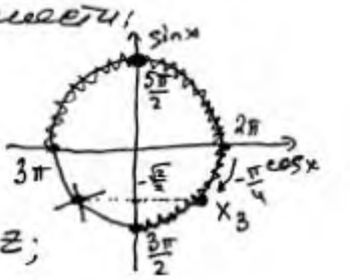
$\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin x=1$; $\sin x=-1$

$\left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\in Z \\ x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi l, l\in Z\end{array}\right.$; $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$; $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi m, m\in Z$

б) Отберем корни, принадлежащие отрезку $[\frac{3\pi}{2}; 3\pi]$ с помощью тригонометр. окружности:

$x_1=\frac{3\pi}{2}$; $x_2=\frac{5\pi}{2}$;

$x_3=2\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{8\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}$.



Ответ: а) $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\in Z$; $x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi l, l\in Z$;

$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$; $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi m, m\in Z$;

б) $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{2}$.

Комментарий.

Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 13.1.2

а) Решите уравнение $\sin x \cdot \cos 2x + \sqrt{2}\cos^2 x + \sin x = 0.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{2}$.

№ 13.

$\sin x \cdot \cos 2x + \sqrt{2} \cos^2 x + \sin x = 0$

по основному тригонометрическому тождеству: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

отсюда $\Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$\sin x \cdot (1 - 2\sin^2 x) + \sqrt{2}(1 - \sin^2 x) + \sin x = 0$

$\sin x - 2\sin^3 x + \sqrt{2} - \sqrt{2}\sin^2 x + \sin x = 0 \quad |\cdot(-1)$

$-2\sin x + 2\sin^3 x - \sqrt{2} + \sqrt{2}\sin^2 x = 0$

$2\sin x(\sin^2 x - 1) + \sqrt{2}(\sin^2 x - 1) = 0$

$(\sin^2 x - 1)(2\sin x + \sqrt{2}) = 0$

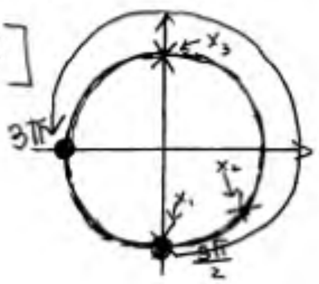
$\left[\begin{array}{l} \sin^2 x - 1 = 0 \\ 2\sin x + \sqrt{2} = 0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \sin^2 x = 1 \\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sin x = -1 \\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$

Отсюда: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi k;\ k \in Z; \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k;\ k \in Z; \\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k;\ k \in Z. \end{array}\right.$

б) $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$



$x_1 = \frac{3\pi}{2}$

$x_2 = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{8\pi - \pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

$x_3 = \frac{5\pi}{2}$

Комментарий.

Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 13.1.3

а) Решите уравнение $\sin x \cdot \cos 2x + \sqrt{2}\cos^2 x + \sin x = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{2}$.

№13

$\sin x \cdot \cos 2x + \sqrt{2}\cos^2 x + \sin x = 0$

$\sin x(1 - 2\sin^2 x) + \sqrt{2}\cos^2 x + \sin x = 0$

$\sin x - 2\sin^3 x + \sqrt{2}\cos^2 x + \sin x = 0$

$2\sin x - 2\sin^3 x + \sqrt{2}\cos^2 x = 0$

$2\sin x(1 - \sin^2 x) + \sqrt{2}\cos^2 x = 0$

$2\sin x \cdot \cos^2 x + \sqrt{2}\cos^2 x = 0$

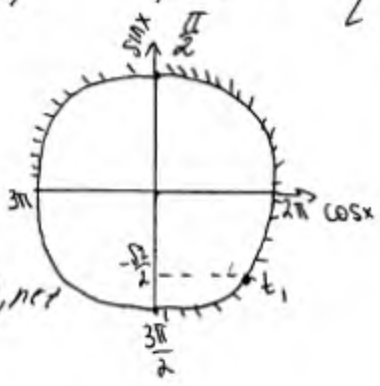
$\cos^2 x(2\sin x + \sqrt{2}) = 0$

$\left[\begin{array}{l}\cos^2 x = 0\\ 2\sin x = -\sqrt{2}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}\\ x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}\\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}\end{array}\right.$

б) Отберем корни с помощью триг. окр-ти, кот $\in \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$

$t_1 = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{8\pi - \pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

$\Rightarrow$ наш корн. $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{4}$; $\frac{\pi}{2}$



Ответ: а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

б) $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{4}$; $\frac{\pi}{2}$

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*. Отбор корней с помощью тригонометрической окружности неверный, так как на отмеченной дуге обозначен корень, не принадлежащий числовому отрезку.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 13.2.1

а) Решите уравнение $\sin 2x + 2\sin(-x) + \cos(-x) - 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) 2π; $\frac{19\pi}{6}$.

а) $\sin 2x - 2\sin x + \cos x - 1 = 0$

$2\sin x \cos x - 2\sin x + \cos x - 1 = 0$

$2\sin x(\cos x - 1) + (\cos x - 1) = 0$

$(2\sin x + 1)(\cos x - 1) = 0$

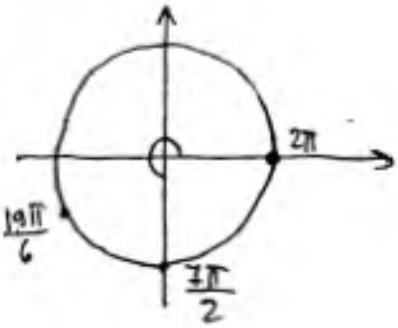
1) $\sin x = -\frac{1}{2}$

$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$

2) $\cos x = 1$

$x = 2\pi k$, $k \in Z$

б) $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$



Ответ: 2π; $\frac{19\pi}{6}$

Комментарий.
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 13.2.2

а) Решите уравнение $\sin 2x + 2\sin(-x) + \cos(-x) - 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) 2π; $\frac{19\pi}{6}$.

а) $\sin 2x + 2\sin(-x) + \cos(-x) - 1 = 0$

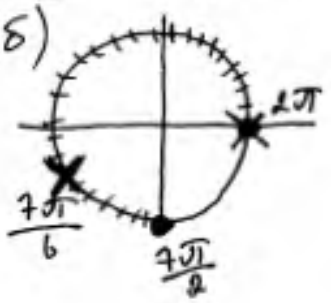
$2\sin x \cdot \cos x - 2\sin x + \cos x - 1 = 0$

$2\sin x(\cos x - 1) + (\cos x - 1) = 0$

$(\cos x - 1)(2\sin x + 1) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 1 \\ 2\sin x = -1\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 1 \\ \sin x = -\frac{1}{2}\end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\pi n, \; n \in Z \\ \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{array}\right. \quad k \in Z \end{array}\right.$

б)



$2\pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{12\pi - 5\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}.$

Ответ: а) $\{2\pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi k; -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k\}$ $n, k \in Z$

б) $\{2\pi; \frac{7\pi}{6}\}$

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*. Отбор корней с помощью тригонометрической окружности неверный, так как на отмеченной дуге указан корень, не принадлежащий числовому отрезку.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 13.2.3

а) Решите уравнение $\sin 2x + 2\sin(-x) + \cos(-x) - 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \dfrac{7\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $-\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) 2π; $\dfrac{19\pi}{6}$.

$\sin 2x + 2\sin(-x) + \cos(-x) - 1 = 0$

$2\sin x \cdot \cos x - 2\sin x + \cos x - 1 = 0$

$2\sin x(\cos x - 1) + \cos x - 1 = 0$

$(\cos x - 1)(2\sin x + 1) = 0$

данное выражение $=0$, если хотя бы одна из скобочек $=0$

рассмотрим скобку ①:

$\cos x - 1 = 0$

$\cos x = 1$

$x_1 = 2\pi k$

рассмотрим скобку ②:

$2\sin x + 1 = 0$

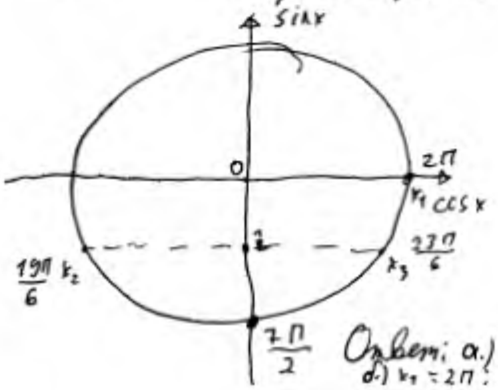
$\sin x = -\frac{1}{2}$

$x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m$

$x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$

при $k, m, n \in Z$

б) на тригонометрическом круге отметим получившиеся корни и определим те, которые входят в промежуток $[2\pi; \frac{7\pi}{2}]$



$x_1 = 2\pi$ → подходит т.к. $\in [2\pi; \frac{7\pi}{2}]$

$x_2 = 3\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{19\pi}{6}$ → подходит т.к. $\in [2\pi; \frac{7\pi}{2}]$

$x_3 = 4\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{23\pi}{6}$ → лишний корень т.к. $\notin [2\pi; \frac{7\pi}{2}]$

Ответ: а.) $x_1 = 2\pi k$; $x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m$; $x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ $(k, m, n \in Z)$

б.) $x_1 = 2\pi$; $x_2 = \frac{19\pi}{6}$

Комментарий.

Неверно решено второе тригонометрическое уравнение в пункте *а*.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 13.3.1

а) Решите уравнение $\cos 2x + 2 = \sqrt{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{8\pi}{3}$; $-\frac{7\pi}{3}$.

13) а) $\cos 2x + 2 = \sqrt{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

$1 - 2\sin^2 x + 2 = -\sqrt{3}\sin x$

$-2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x + 3 = 0$

Пусть $\sin x = t$, тогда

$-2t^2 + \sqrt{3}t + 3 = 0$

$D = b^2 - 4ac = (\sqrt{3})^2 - 4\cdot(-2)\cdot 3 = 3 + 24 = 27$

$t = \frac{-\sqrt{3} \pm 3\sqrt{3}}{-4}$ $\quad t_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $t_2 = \sqrt{3}$

Значит, $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ или $\sin x = \sqrt{3}$

1) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x_1 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$

$x_2 = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$

2) $\sin x = \sqrt{3}$ – нет решений, т.к. $-1 \le \sin x \le 1$, а $|\sqrt{3}| > 1$

б) Найдем корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$

1) $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$

$-3\pi \le -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \le -\frac{3\pi}{2}$

$-3 \le -\frac{1}{3} + 2k \le -\frac{3}{2}$

$-3 + \frac{1}{3} \le 2k \le -\frac{3}{2} + \frac{1}{3}$

$-\frac{8}{3} \le 2k \le -\frac{11}{6}$

$-\frac{16}{2\cdot 6} \le k \le -\frac{11}{12}$

$-\frac{16}{12} \le k \le -\frac{11}{12}$

$-1\frac{1}{3} \le k \le -\frac{11}{12}$, т.к. $k \in Z$, то $k = -1$

Если $k = -1$, то $x = -\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{\pi}{3} - \frac{3\pi\cdot 2}{3} = -\frac{8\pi - \pi}{3} = -\frac{7\pi}{3}$

2) $-3\pi \le \frac{4\pi}{3} + 2\pi n \le -\frac{3\pi}{2}$

$-3\pi - \frac{4\pi}{3} \le 2\pi n \le -\frac{3\pi}{2} - \frac{4\pi}{3}$

$-\frac{13\pi}{3} \le 2\pi n \le -\frac{17\pi}{6}$

$-\frac{13}{6} \le n \le -\frac{17}{12}$

$-\frac{26}{12} \le n \le -\frac{17}{12}$

$-2\frac{1}{6} \le n \le -\frac{17}{12} = -1\frac{5}{12}$, $n \in Z$

$n = -2$

Если $n = -2$, то $x = \frac{4\pi}{3} - 4\pi = -\frac{8\pi}{3}$

Ответ: а) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k$; $\frac{4\pi}{3} + 2\pi n$; $k \in Z$, $n \in Z$

б) $-\frac{8\pi}{3}$; $-\frac{7\pi}{3}$

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*. При решении двойных неравенств допущена ошибка: $-\frac{3}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{7}{6}$. Отбор корней нельзя считать обоснованным.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 13.3.2

а) Решите уравнение $\cos 2x + 2 = \sqrt{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{8\pi}{3}$; $-\frac{7\pi}{3}$.

13) а) $\cos 2x + 2 = \sqrt{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

$\cos 2x + 2 = \sqrt{3}\cdot(-\sin x)$

$1 - 2\sin^2 x + 2 = -\sqrt{3}\cdot\sin x$

$-2\sin^2 x + 3 + \sqrt{3}\sin x = 0$

Пусть $\sin x = y$

Тогда

$-2y^2 + 3 + \sqrt{3}\,y = 0$

$D = \sqrt{3 - 4\cdot 3\cdot(-2)} = \sqrt{27} > 0$ 2 корня

$y_1 = \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{27}}{-4} = \frac{-\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{-4} = \frac{2\sqrt{3}}{-4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$y_2 = \frac{-\sqrt{3} - \sqrt{27}}{-4} = \frac{-4\sqrt{3}}{-4} = \sqrt{3}$

Обратно $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \sin x = \sqrt{3}$

$x = (-1)^n\cdot\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi n \quad n \in Z$ $\quad$ нет решен $\sin x \in [-1; 1]$

б)

При $n = 0$

$x = -\frac{\pi}{3} \notin \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$

При $n = -1$

$x = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3} \notin \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$

При $n = -2$

$x = -\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{7\pi}{3} \in \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$

При $n = -3$

$x = \frac{\pi}{3} - 3\pi = -\frac{8\pi}{3} \in \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$

Ответ: а) $x = (-1)^n\cdot\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi n \quad n \in Z$

б) $-\frac{8\pi}{3}$; $-\frac{7\pi}{3}$

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*. При решении квадратного уравнения есть неточность в записи дискриминанта – объединение записей дискриминанта и корня из него. Отбор корней нельзя считать обоснованным, так как перебор остановлен на корне, принадлежащем отрезку.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 13.3.3

а) Решите уравнение $\cos 2x + 2 = \sqrt{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{8\pi}{3}$; $-\frac{7\pi}{3}$.

13 а) $\cos 2x + 2 = \sqrt{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

$\cos^2 x - \sin^2 x + 2 = \sqrt{3}\cdot\sin x$

$1 - \sin^2 x - \sin^2 x - \sqrt{3}\sin x + 2 = 0$

$-2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x + 3 = 0$

$2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x - 3 = 0$

замена $\sin x = t$, $t \in [-1; 1]$

$2t^2 + \sqrt{3}t - 3 = 0$

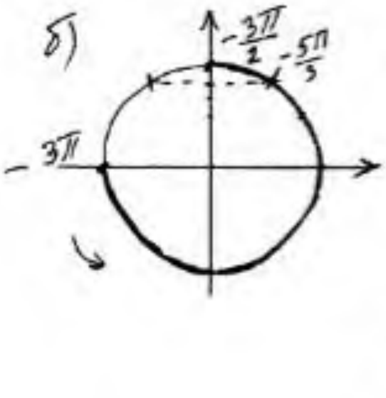
$D = 3 - 4\cdot 2\cdot(-3) = 3 + 24 = 27 = (3\sqrt{3})^2$

$t_1 = \frac{-\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $t_2 = \frac{-\sqrt{3} - 3\sqrt{3}}{4} = -\frac{4\sqrt{3}}{4} = -\sqrt{3}$

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\sin x = -\sqrt{3}$; $-\sqrt{3} \notin [-1; 1]$

$x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$.

б)



$[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}]$

Ответ: а) $(-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$;
б) $-\frac{5\pi}{3}$.

Комментарий.

Тригонометрическое уравнение решено неверно. Во второй строчке в правой части отсутствует знак минус – ошибка в формуле приведения. Пункт *а* не выполнен (не из-за вычислительной ошибки).

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 13.4.1

а) Решите уравнение $9\cdot 81^{\cos x}-28\cdot 9^{\cos x}+3=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2};4\pi\right]$.

Ответ: а) $\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $\dfrac{\pi}{3}+2\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$; $-\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) 3π; $\dfrac{11\pi}{3}$.

$9\cdot 81^{\cos x}-28\cdot 9^{\cos x}+3=0$

$9\cdot(9^{\cos x})^2-28\cdot 9^{\cos x}+30$

$9^{\cos x}=t$, тогда

$9t^2-28t+3=0$

$D=784-108=676$

$t=\frac{28\pm26}{18}$ $\quad t_1=\frac{1}{9}$ $\quad t_2=3$

$9^{\cos x}=\frac{1}{9}$ $\qquad 9^{\cos x}=3$

$9^{\cos x}=9^{-1}$ $\qquad 3^{2\cos x}=3^1$

$\cos x=-1$ $\qquad 2\cos x=1$ $\qquad \cos x=\frac{1}{2}$

$x_1=\pi+2\pi n$, $n\in Z$ $\qquad x_2=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$, объединяя

x_1 и x_2 получаем $x=\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi k}{3}$, $k\in Z$

б) $\frac{11\pi}{3}$; 3π; 4π $\in\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$

Ответ: а) $\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi k}{3}$, $k\in Z$, б) 3π, $\frac{11\pi}{3}$; 4π.

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*. При отборе корней отсутствует решение и ошибочно указано число, которое не является корнем тригонометрического уравнения.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 13.4.2

а) Решите уравнение $9\cdot 81^{\cos x}-28\cdot 9^{\cos x}+3=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$.

Ответ: а) $\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{3}+2\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) 3π; $\frac{11\pi}{3}$.

а) $9\cdot 81^{\cos x}-28\cdot 9^{\cos x}+3=0$

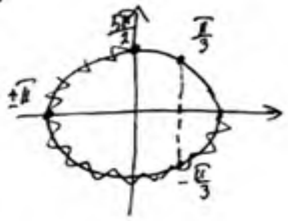
$9\cdot 3^{4\cos x}-28\cdot 3^{2\cos x}+3=0$

Пусть $3^{2\cos x}=t$, то $9\cdot t^2-28\cdot t+3=0$

$D=784-4\cdot 9\cdot 3=676$

$t_1=\frac{28-26}{18}=\frac{1}{9}$

$t_2=\frac{28+26}{18}=3$



$3^{2\cos x}=\frac{1}{9}$

$3^{2\cos x}=3^{-2}$

$\cos x=-1$

$x=\pm\pi+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$.

$3^{2\cos x}=3^{1}$

$\cos x=\frac{1}{2}$

$x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$.

б) $\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$

$x=\frac{\pi}{3}+2\pi k$, не подходит.

1. $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$

$2{,}5\pi<-\frac{\pi}{3}+2\pi k<4\pi \quad |:\pi$

$2{,}5<-\frac{1}{3}+2k<4$

$2\frac{3}{6}+\frac{2}{6}<2k<4\frac{1}{3} \quad |:2$

$1\frac{5}{6}<k<2\frac{1}{3}$

$\Rightarrow k=2 \qquad x=-\frac{\pi}{3}+4\pi=\frac{11\pi}{3}$

2. $x=\pi+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$.

$2{,}5\pi<\pi+2\pi k<4\pi \quad |:\pi\ -1$

$2{,}5-1<2k<4-1 \quad |:2$.

$0{,}75<k<1{,}5$

$\Rightarrow k=1$.

$x=\pi+2\pi=3\pi$.

3. $x=-\pi+2\pi k$

$2{,}5\pi<-\pi+2\pi k<4\pi \quad |:2\pi$

$1{,}75<k<2{,}5$

$\Rightarrow k=2$.

$x=-\pi+4\pi=3\pi$.

Ответ: $x=3\pi$, $x=\frac{11\pi}{3}$

Комментарий.

В записи корней первого тригонометрического уравнения содержится дублирующая запись корней, но ошибки в этом нет. Получен верный ответ в пункте *а*. При отборе корней допущены ошибки при делении $2\frac{5}{6}$ и $4\frac{1}{3}$ на 2.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 13.4.3

а) Решите уравнение $9\cdot 81^{\cos x} - 28\cdot 9^{\cos x} + 3 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Ответ: а) $\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{3} + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) 3π; $\frac{11\pi}{3}$.

а)

$9\cdot 81^{\cos x} - 28\cdot 9^{\cos x} + 3 = 0$

$9\cdot (9^2)^{\cos x} - 28\cdot 9^{\cos x} + 3 = 0$

Пусть $9^{\cos x} = t$, тогда:

$9t^2 - 28t + 3 = 0$

$D = (-28)^2 - 4\cdot 9\cdot 3 = 784 - 108 = 676$

$t_1 = \frac{28-26}{2\cdot 9} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$; $t_2 = \frac{28+26}{2\cdot 9} = \frac{54}{18} = 3$

Вернемся к замене: $9^{\cos x} = \frac{1}{9}$ или $9^{\cos x} = 3$

$\cos x = -1$

$x = \pi + \pi d, d \in z$

$(3^2)^{\cos x} = 3^1$

$2\cos x = 1$

$\cos x = \frac{1}{2}$

$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in z$

б) $[\frac{5\pi}{2}; 4\pi]$

$\frac{5\pi}{2} \le \frac{\pi}{3} + 2\pi n \le 4\pi$

$\frac{5}{2} \le \frac{1}{3} + 2n \le 4, n\in z$

$2\frac{1}{6} \le 2n \le 3\frac{2}{3}, n\in z$

$1\frac{1}{12} \le n \le 1\frac{5}{6}, n \in z$

n - нет чисел

$\frac{5\pi}{2} \le -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \le 4\pi$

$\frac{5}{2} \le -\frac{1}{3} + 2k \le 4, k\in z$

$2\frac{5}{6} \le 2k \le 4\frac{1}{3}, k \in z$

$1\frac{5}{12} \le k \le 2\frac{1}{6}, k\in z$

$k = 2$

$x_1 = -\frac{\pi}{3} + 2\cdot 2\pi = \frac{11\pi}{3}$

$\frac{5\pi}{2} \le \pi + \pi d \le 4\pi$

$\frac{5}{2} \le 1 + d \le 4, d \in z$

$1\frac{1}{2} \le d \le 3, d\in z$

$d = 2, 3$

$x_2 = \pi + 2\pi = 3\pi$

$x_3 = \pi + 4\pi = 5\pi$

Ответ: а) $x = \pi + \pi d, d \in z$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in z$;

б) $x_1 = \frac{11\pi}{3}$; $x_2 = 3\pi$; $x_3 = 5\pi$

Комментарий.

Тригонометрическое уравнение $\cos x = -1$ решено неверно.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 13.5.1

а) Решите уравнение $2\log_4^2(4\sin x) - 5\log_4(4\sin x) + 2 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{6}$.

а) $2\log_4^2(4\sin x) - 5\log_4(4\sin x) + 2 = 0$, $\log_4(4\sin x) = t$,

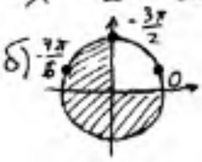
$2t^2 - 5t + 2 = 0$; $D = 25 - 16 = 9 = 3^2$, $t_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$; $t_2 = \frac{5+3}{4} = 1$;

$\log_4(4\sin x) = t_1 = \frac{1}{2}$; $\log_4(4\sin x) = \log_4 2$, $4\sin x = 2$; $\sin x = \frac{1}{2}$;

$x \in \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$; $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$;

$\log_4(4\sin x) = t_2 = 1$; $\log_4(4\sin x) = \log_4 4$; $4\sin x = 4$; $\sin x = 1$;

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$ Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$

б) 

Ответ: $-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{7\pi}{6}$.

Комментарий.

Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки при вычислении t_2, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 13.5.2

а) Решите уравнение $2\log_4^2(4\sin x)-5\log_4(4\sin x)+2=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{6}$.

а) ОДЗ: $4\sin x > 0$
$\sin x > 0$

Для таких x решим методом интервалов

Пусть $\log_4(4\sin x)=t$; $t \geqslant 0$

$2t^2-5t+2=0$

$D=25-4\cdot2\cdot2$

$D=25-16$

$D=9$

$t_1=\frac{5+3}{2}$ $\quad t_1=4$

$t_2=\frac{5-3}{2}$ $\quad t_2=1$

Обратная замена

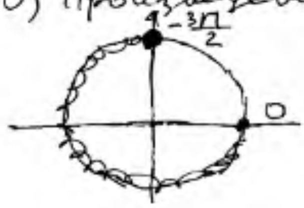
$\log_4(4\sin x)=1$ или $\log_4(4\sin x)=4$

$4\sin x=4$ $\quad 4\sin x=256$

$\sin x=1$ $\quad \sin x=64$

$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$ $\quad$ Нет решений.

б) Произведём отбор на единичной окружности



$-\frac{3\pi}{2}$

Ответ: а) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ n\in Z$ б) $-\frac{3\pi}{2}$

Комментарий.

Получены неверные ответы не из-за вычислительной ошибки при нахождении корней квадратного уравнения.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 13.5.3

а) Решите уравнение $2\log_4^2(4\sin x) - 5\log_4(4\sin x) + 2 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{6}$.

$2\log_4^2(4\sin x) - 5\log_4(4\sin x) + 2 = 0$ $\quad \log_4(4\sin x) = t$

ОДЗ
$4\sin x \neq 0$
$\sin x \neq 0$
$x \neq \pi n \quad n \in \mathbb{Z}$

$2t^2 - 5t + 2 = 0 \quad D = 25 - 16 = 9$

$t_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$

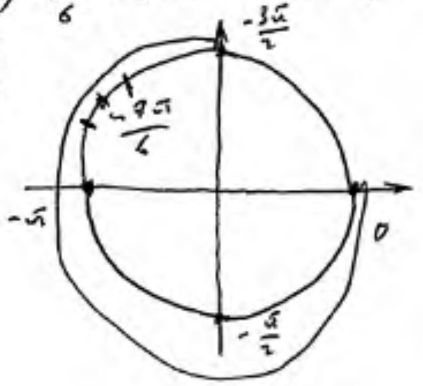
$t_2 = \frac{5+3}{4} = 2$

$\left[\begin{array}{l}\log_4(4\sin x) = 2\\ \log_4(4\sin x) = \frac{1}{2}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}8 = 4\sin x\\ 2 = 4\sin x\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\sin x = 2\\ \sin x = \frac{1}{2}\end{array}\right.$

не подходит т.к. $-1 \leq \sin x \leq 1$

$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$

$\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$



Ответ: а) $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$

б) ~~хне~~ $-\frac{7\pi}{6}$ $\quad n \in \mathbb{Z}$

Ответ: а) $\frac{\Pi}{6} + 2\Pi n$; $\frac{5\Pi}{6} + 2\Pi n$; б) $-\frac{7\Pi}{6}$.

Комментарий.

При решении простейшего логарифмического уравнения допущена ошибка, которая не является вычислительной, кроме того, при нахождении ОДЗ допущена ошибка, которая никак не может быть отнесена к вычислительным. Любая из этих ошибок уже не позволяет выставить положительный балл. Типичный пример выставления 0 баллов.

Оценка эксперта: 0 баллов.

2. Критерии проверки и оценка решений задания 14

Задание 14 — стереометрическая задача, она разделена на пункты *а* и *б*. В пункте *а* нужно **доказать** геометрический факт, в пункте *б* найти (вычислить) геометрическую величину.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*3*

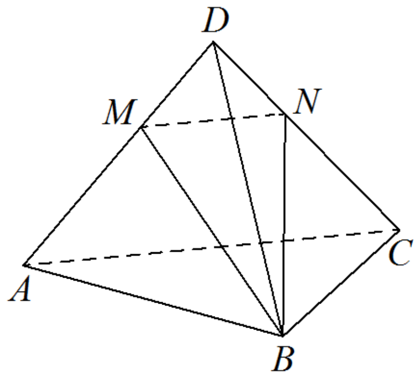
Задача 14 (демонстрационный вариант ЕГЭ 2024 г.)

В пирамиде $ABCD$ рёбра DA, DB и DC попарно перпендикулярны, а $AB = BC = AC = 5\sqrt{2}$.

а) Докажите, что $BD = CD$.

б) На рёбрах DA и DC отмечены точки M и N соответственно, причём $DM : MA = DN : NC = 2 : 3$. Найдите площадь сечения MNB.

Решение.



а) Прямоугольные треугольники ABD и ACD равны, поскольку катет AD общий, а $AB = AC$. Значит, $BD = CD$.

б) Найдём боковые рёбра. Треугольник BCD — равнобедренный и прямоугольный, поэтому $BD = CD = \dfrac{BC}{\sqrt{2}} = 5$. Аналогично $AD = 5$.

Найдём стороны треугольника MNB:

$$MB = NB = \sqrt{ND^2 + DB^2} = \sqrt{29},$$

$$MN = \sqrt{MD^2 + DN^2} = 2\sqrt{2}.$$

Площадь равнобедренного треугольника MNB равна

$$\frac{1}{2} \cdot MN \cdot \sqrt{MB^2 - \left(\frac{MN}{2}\right)^2} = 3\sqrt{6}.$$

Ответ: б) $3\sqrt{6}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

Задание 14.1

В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD=3$ и $BC=2$. Точка M делит ребро A_1D_1 в отношении $A_1M:MD_1=1:2$, а точка K — середина ребра DD_1.

а) Докажите, что плоскость MKC делит отрезок BB_1 пополам.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MKC, если $\angle MKC=90°$, $\angle ADC=60°$.

Решение.

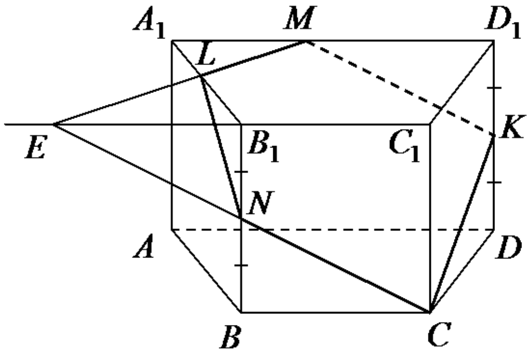


Рис. 1

а) Боковая грань BCC_1B_1 призмы параллельна грани ADD_1A_1, поскольку составляющие их рёбра соответственно параллельны. Проведём через вершину C прямую, параллельную KM. Пусть эта прямая пересекает ребро BB_1 в точке N, а продолжение ребра B_1C_1 в точке E, а прямая EM пересекает ребро A_1B_1 в точке L (рис. 1).

Прямоугольные треугольники CBN и MD_1K равны, поскольку равны их катеты BC и MD_1, а также острые углы, ввиду параллельности соответствующих сторон. Следовательно,

$$BN=D_1K=\frac{1}{2}DD_1=\frac{1}{2}BB_1,$$

а значит, точка N — середина ребра BB_1.

б) Пусть высота призмы равна $2x$. Тогда $B_1N=BN=DK=x$.

В равнобедренной трапеции с основаниями 3 и 2 и углом $60°$ боковые стороны равны 1, то есть $A_1B_1=CD=1$.

Прямоугольные треугольники EB_1N и CBN равны по катету и углу при вершине N. Значит,

$$EN^2=NC^2=BN^2+BC^2=x^2+4.$$

Из прямоугольных треугольников CDK и NCK имеем:

$$CK^2=CD^2+DK^2=x^2+1;\ NK^2=NC^2+CK^2=x^2+4+x^2+1=2x^2+5.$$

Для треугольника BCD имеем:

$$BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cdot\cos120°=7.$$

Поскольку $NK=BD$, получаем: $2x^2+5=7$, откуда $x=1$.

Следовательно, $CK=\sqrt{2}$, $EN=NC=MK=\sqrt{5}$.

Площадь прямоугольной трапеции $MKCE$ равна

$$\frac{1}{2}\cdot CK\cdot\left(MK+EC\right)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{5}+2\sqrt{5}\right)=\frac{3\sqrt{10}}{2}.$$

Треугольники A_1ML и B_1EL подобны, значит, $EL:LM = EB_1:MA_1 = 2:1$, а площади треугольников ELN и EMN относятся как $2:3$ (рис. 2). Тогда площадь треугольника ELN равна

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}=\frac{\sqrt{10}}{3}.$$

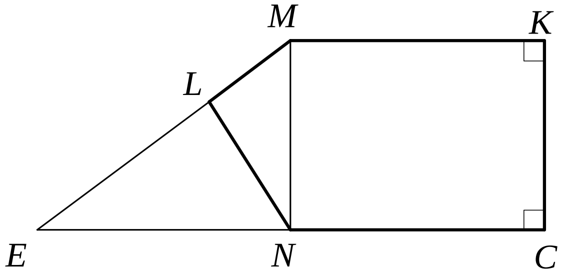


Рис. 2

Площадь сечения $MKCNL$ равна разности площадей трапеции $MKCE$ и треугольника ELN:

$$\frac{3\sqrt{10}}{2}-\frac{\sqrt{10}}{3}=\frac{7\sqrt{10}}{6}.$$

Ответ: б) $\frac{7\sqrt{10}}{6}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

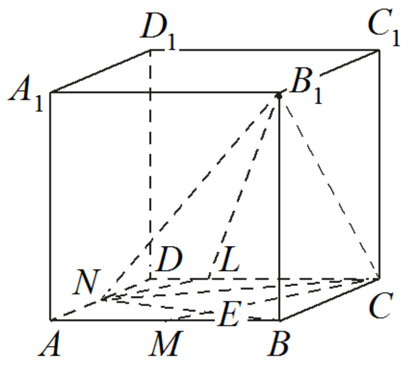
Задание 14.2

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M и N — середины рёбер AB и AD соответственно.

а) Докажите, что прямые B_1N и CM перпендикулярны.

б) Плоскость α проходит через точки N и B_1 параллельно прямой CM. Найдите расстояние от точки C до плоскости α, если $B_1N = 6$.

Решение.



а) Пусть отрезки NB и MC пересекаются в точке E. Прямоугольные треугольники NAB и MBC равны по двум катетам, значит,

$$\angle MEB = 180° - (\angle EMB + \angle EBM) =$$
$$= 180° - (\angle EMB + \angle MCB) = 90°.$$

Отрезок BN — проекция отрезка NB_1 на плоскость ABC. Следовательно, по теореме о трёх перпендикулярах прямые B_1N и CM перпендикулярны.

б) Пусть плоскость α пересекает ребро CD в точке L. Прямые NL и CM, лежащие в плоскости ABC, параллельны, поскольку прямая NL лежит в плоскости α, параллельной прямой CM. Следовательно, $\angle DLN = \angle DCM = \angle BMC$, а значит, прямоугольные треугольники DLN и BMC подобны по острому углу. Получаем:

$$DL = BM \cdot \frac{DN}{BC} = \frac{AB}{2} \cdot \frac{AD}{2BC} = \frac{CD}{4}.$$

Заметим, что $\angle LNB_1 = 90°$, поскольку прямая B_1N перпендикулярна прямой NL, параллельной прямой CM. Пусть ребро куба равно a. Получаем:

$$36 = B_1N^2 = AN^2 + AB^2 + BB_1^2 = \frac{9a^2}{4},$$

откуда

$$a = 4;\ BB_1 = a = 4,\ DN = 2,\ CL = 3,\ LN = \frac{a\sqrt{5}}{4} = \sqrt{5}.$$

Объём пирамиды $CNLB_1$ равен $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} CL \cdot DN\right) \cdot BB_1 = 4$.

С другой стороны, объём этой пирамиды равен $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} NB_1 \cdot LN\right) \cdot x = x\sqrt{5}$,

где x — расстояние от точки C до плоскости α. Из равенства $x\sqrt{5} = 4$ получаем $x = \frac{4\sqrt{5}}{5}$.

Ответ: б) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

Задание 14.3

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На рёбрах AB и B_1C_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $AK = B_1L = 2$. Точка M – середина ребра A_1C_1. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой – точка M, а основание – сечение данной призмы плоскостью γ.

Решение.

а) Проведём через точки K и L прямые, параллельные AC. Пусть эти прямые пересекают рёбра BC и A_1B_1 в точках K_1 и L_1 соответственно (рис. 1). Тогда трапеция KL_1LK_1 является сечением исходной призмы плоскостью γ. Рассмотрим плоскость BB_1M. Пусть эта плоскость пересекает прямые AC, KK_1 и LL_1 в точках N, E и F соответственно. Четырёхугольник BB_1MN – прямоугольник, причём $BB_1 = 3$, $B_1M = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot A_1B_1 = 3\sqrt{3}$.

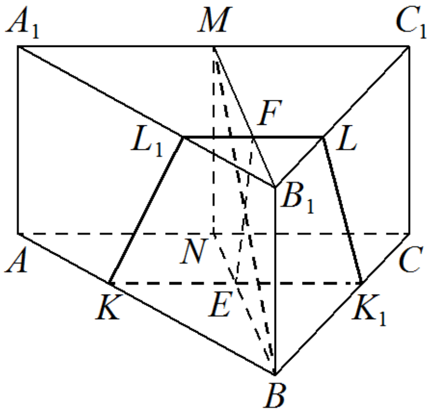


Рис. 1

Кроме того, $NE : EB = AK : KB = 1:2$, $B_1F : FM = B_1L : LC_1 = 1:2$, откуда $MF = 2\sqrt{3}$, $NE = \sqrt{3}$. Пусть EH – высота трапеции $EFMN$ (рис. 2), тогда

$FH = MF - NE = \sqrt{3}$.

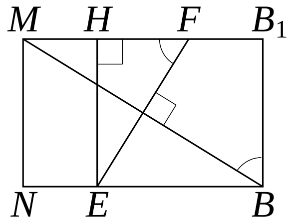


Рис. 2

Поскольку $\operatorname{tg}\angle MFE = \dfrac{EH}{FH} = \sqrt{3} = \dfrac{MB_1}{BB_1} = \operatorname{tg}\angle MBB_1$,

$\angle MFE = \angle MBB_1 = 90° - \angle BMF$,

то есть прямые EF и BM перпендикулярны.

Прямая KK_1 параллельна прямой AC, которая перпендикулярна плоскости BB_1M. Значит, прямые KK_1 и EF перпендикулярны прямой BM, поэтому прямая BM перпендикулярна плоскости γ.

б) Расстояние от точки M до плоскости γ равно $MF \cdot \sin\angle MFE$, а площадь трапеции KL_1LK_1 равна

$$\frac{KK_1 + LL_1}{2} \cdot EF = \frac{\frac{2}{3}AC + \frac{1}{3}A_1C_1}{2} \cdot \frac{EH}{\sin\angle MFE} = \frac{9}{\sin\angle MFE}.$$

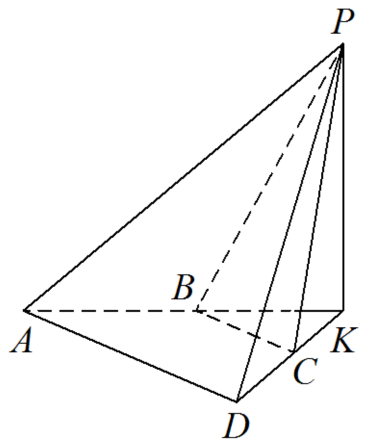
Значит, искомый объём равен $\dfrac{1}{3} \cdot MF \cdot \sin\angle MFE \cdot \dfrac{9}{\sin\angle MFE} = 6\sqrt{3}$.

Ответ: б) $6\sqrt{3}$.

Задание 14.4

Основанием четырёхугольной пирамиды $PABCD$ является трапеция $ABCD$, причём $\angle BAD + \angle ADC = 90°$. Плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, K – точка пересечения прямых AB и CD.
а) Докажите, что плоскости PAB и PCD перпендикулярны.
б) Найдите объём пирамиды $KBCP$, если $AB = BC = CD = 4$, а высота пирамиды $PABCD$ равна 9.

Решение.



а) Заметим, что $\angle AKD = 90°$. Плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, поэтому они пересекаются по прямой, содержащей высоту пирамиды. Значит, PK – высота пирамиды. Таким образом, угол $\angle AKD$ является линейным углом двугранного угла между плоскостями PAB и PCD. Значит, они перпендикулярны.
б) Поскольку $AB = CD$, трапеция $ABCD$ является равнобедренной. Значит,

$$\angle BAD = \angle ADC = \angle KBC = \angle KCB = 45°;$$

$$BK = CK = \frac{\sqrt{2}}{2} BC = 2\sqrt{2}.$$

Таким образом, площадь треугольника KBC равна $S_{KBC} = \frac{BK \cdot CK}{2} = 4$, а объём пирамиды $KBCP$ равен $\frac{PK \cdot S_{KBC}}{3} = 12$.

Ответ: б) 12.

Задание 14.5

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах CD и SC отмечены точки N и K соответственно, причём $DN:NC = SK:KC = 1:5$. Плоскость α содержит прямую KN и параллельна прямой SA.

а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой BC.

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости α.

Решение.

а) По условию $DN:NC = SK:KC$, значит, прямые SD и KN параллельны. Следовательно, плоскости SAD и α параллельны (рис. 1).

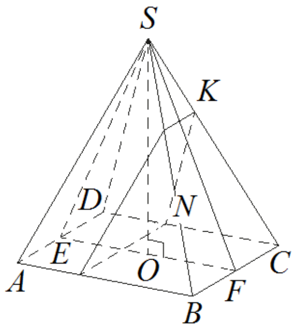


Рис. 1

Поскольку отрезки BC и AD параллельны, а плоскость α параллельна плоскости SAD, прямая BC параллельна плоскости α.

б) Поскольку плоскость α параллельна прямой BC, расстояние от точки C до плоскости α равно расстоянию от прямой BC до плоскости α. Пусть точки E и F – середины рёбер AD и BC соответственно. Тогда прямые SF и EF перпендикулярны прямой BC. Таким образом, плоскость SEF перпендикулярна прямой BC и параллельной ей плоскости α. Пусть плоскость α пересекает прямые SF и EF в точках Q и R соответственно (рис. 2). Тогда искомое расстояние равно расстоянию h от точки F до прямой QR. Высота SO пирамиды $SABCD$ лежит в плоскости SEF, откуда

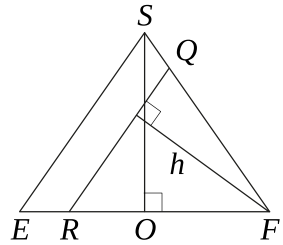


Рис. 2

$$EF = 6,\ SE = \sqrt{SA^2 - \frac{AD^2}{4}} = 2\sqrt{10};\ \cos\angle SEO = \frac{EF}{2SE} = \frac{3}{2\sqrt{10}}.$$

Плоскости SAD и α параллельны, поэтому $\angle QRF = \angle SEO$, откуда

$$h = RF\sin\angle QRF = \frac{5EF}{6}\cdot\sqrt{1-\frac{9}{40}} = \frac{\sqrt{310}}{4}.$$

Ответ: б) $\frac{\sqrt{310}}{4}$.

Примеры оценивания выполнения задания 14

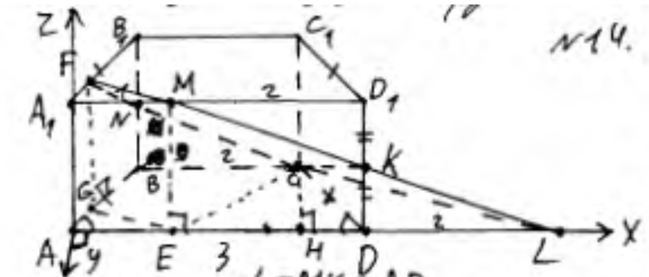
Пример 14.1.1

В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 3$ и $BC = 2$. Точка M делит ребро A_1D_1 в отношении $A_1M : MD_1 = 1 : 2$, а точка K — середина ребра DD_1.

а) Докажите, что плоскость MKC делит отрезок BB_1 пополам.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MKC, если $\angle MKC = 90°$, $\angle ADC = 60°$.

Ответ: б) $\dfrac{7\sqrt{10}}{6}$.



№14.

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — призма, $ABCD$ — равноб. трап., $AD = 3$, $BC = 2$, $M \in A_1D_1$, $A_1M : MD_1 = 1:2$, K — ср. DD_1

а) Док: $(MKC) \cap BB_1 = N$ — сер. BB_1

б) $S_{сеч}$ — ?, $\angle MKC = 90°$, $\angle ADC = 60°$.

$L = MK \cap AD$

а) Д.п. ; $F = (KMC) \cap A_1B_1$; $E = \Pi^{M}_{(ABC)}$, $G = \Pi^{F}_{(ABC)}$

Т.к. $A_1D_1 = AD = 3$ и $A_1M : MD_1 = 1:2$, то $A_1M = 1$, $MD_1 = 2$.

$A_1D_1 \parallel AD$, ML — сек. $\Rightarrow \angle D_1MK = \angle KLD$.

$\left.\begin{array}{l} \angle D_1MK = \angle KLD \\ \angle KD_1M = \angle KDL = 90° \\ D_1K = KD \end{array}\right| \Rightarrow \Delta KD_1M = \Delta KDL \Rightarrow DL = D_1M = 2$

$(B_1C_1C) \parallel (A_1D_1D)$, $MK = (MKC) \cap (A_1D_1D)$, $NC = (MKC) \cap (B_1C_1C)$ $\Big| \Rightarrow MK \parallel NC$

$\left.\begin{array}{l} MK \parallel NC,\ BC \parallel AD \Rightarrow \angle NCB = \angle MLA \\ \angle NBC = \angle KDL = 90° \\ BC = DL = 2 \end{array}\right| \Rightarrow \Delta NBC = \Delta KDL \Rightarrow NB = KD = \frac{1}{2}BB_1 = \frac{1}{2}AA_1 = NB_1$

Чтд.

б) Д.п. $H = \Pi^{C}_{AD}$. Т.к. трап. равнобедр., то $HD = \frac{AD - BC}{2} = 0{,}5$

$CH = HD\,tg\,\angle ADC = 0{,}5\sqrt{3}$. $CD = \frac{HD}{\cos \angle ADC} = 1$.

$\angle MKC = 90° \Rightarrow MC^2 = MK^2 + KC^2$. Пусть $h = \frac{1}{2}AA_1 = DK$. $AA_1 = EM = 2h$

$MC^2 = ME^2 + EC^2 = ME^2 + EH^2 + HC^2$ $EH = ED - HD = MD_1 - HD = 1{,}5$

$MC^2 = 4h^2 + 2{,}25 + 0{,}75 = 4h^2 + 3$

$KC^2 = CD^2 + KD^2 = 1 + h^2$ $MK^2 = MD_1^2 + D_1K^2 = 4 + h^2$

$4h^2 + 3 = 4 + h^2 + 1 + h^2$ $2h^2 = 2$ $h = 1$ $AA_1 = 2$ $\angle CDL = 180° - \angle ADC = 120°$

По т. косинусов $CL^2 = CD^2 + DL^2 - 2CD \cdot DL \cdot \cos \angle CDL = 1 + 4 + 1 \cdot 2 = 7$ $CL = \sqrt{7}$

$(MKC)\cap(ABC)=CL$, $(MKC)\cap(A_1B_1C_1)=FM$, $(ABC)\parallel(A_1B_1C_1)$ $\Rightarrow FM\parallel CL$

Т.к. $E=\Pi^{M}_{(ABC)}$, $G=\Pi^{F}_{(ABC)}$, $(ABC)\parallel(A_1B_1C_1)$, $GE=FM$, $GE\parallel FM$

Тогда $GE\parallel CL \Rightarrow \angle GEA=\angle CLH$. $\sin\angle GEA=\sin\angle CLH=\frac{CH}{CL}=\frac{\sqrt3}{2\sqrt7}$

$\angle GAE=\angle ADC$ (р/б трап.) $\cos\angle GEA=\sqrt{1-\sin^2\angle GEA}=\frac{5}{2\sqrt7}$

$\sin\angle AGE=\sin(180^\circ-\angle GAE-\angle GEA)=\sin(120^\circ-\angle GEA)=$

$=\sin120^\circ\cos\angle GEA-\cos120^\circ\sin\angle GEA=\frac{\sqrt3}{2}\cdot\frac{5}{2\sqrt7}+\frac12\cdot\frac{\sqrt3}{2\sqrt7}=\frac{3\sqrt3}{2\sqrt7}$

По т. синусов $\frac{GE}{\sin\angle GEA}=\frac{AE}{\sin\angle AGE}\Rightarrow GE=AE\cdot\frac{\sin\angle GEA}{\sin\angle AGE}=A_1M\cdot\frac{\sqrt3}{2\sqrt7}\cdot\frac{2\sqrt7}{3\sqrt3}=$

$=\frac{A_1M}{3}=\frac13$. $S_{AGE}=\frac12 AE\cdot EG\cdot\sin\angle AEG=\frac16\cdot\frac{\sqrt3}{2\sqrt7}=\frac{\sqrt3}{12\sqrt7}$

$S_{GEDCB}=S_{ABCD}-S_{AGE}=\frac{(BC+AD)}{2}CH-\frac{\sqrt3}{12\sqrt7}=\frac{5\sqrt3}{4}-\frac{\sqrt3}{12\sqrt7}$

Введём систему координат как на рисунке. $L(5;0;0)$ $M(1;0;2)$

$C(3-0,5;-0,5\sqrt3;0)$ $C(2,5;-0,5\sqrt3;0)$

(ABC): $z=0$, x,y – любые, $0x+0y+z=0$ (MKC): $Ax+By+Cz+1=0$

$$\begin{cases}A+2C+1=0\\5A+1=0\\2,5A-0,5\sqrt3B+1=0\end{cases}\qquad\begin{cases}A=-\frac15\\C=-\frac25\\B=\frac{\sqrt3}{3}\end{cases}$$

(MKC): $-\frac15x+\frac{\sqrt3}{3}y-\frac25z+1=0$ $|\cdot(-15)$

$3x-5\sqrt3y+6z-15=0$

$\vec{n_1}$ и $\vec{n_2}$ – нормали к (ABC) и (MKC). $\vec{n_1}\{0;0;1\}$ $\vec{n_2}\{3;-5\sqrt3;6\}$

$\cos(\widehat{\vec{n_1};\vec{n_2}})=\frac{6}{1\cdot\sqrt{9+75+36}}=\frac{3}{\sqrt{30}}=\cos(\widehat{(ABC);(MKC)})=\frac{\sqrt3}{\sqrt{10}}$

$GEDCB=\Pi^{MKCNF}_{(ABC)}\Rightarrow S_{MKCNF}=\frac{S_{GEDCB}}{\cos(\widehat{(ABC);(MKC)})}=\frac{5\sqrt{10}}{4}-\frac{\sqrt{10}}{12\sqrt7}$. Ответ: б) $\frac{5\sqrt{10}}{4}-\frac{\sqrt{10}}{12\sqrt7}$

Комментарий.

Верное доказательство утверждения пункта *а* и получен неверный ответ в пункте *б* (не арифметическая ошибка).

Оценка эксперта: 1 балл.

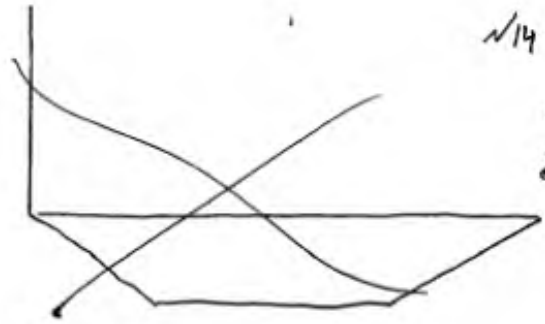
Пример 14.1.2

В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD=3$ и $BC=2$. Точка M делит ребро A_1D_1 в отношении $A_1M:MD_1=1:2$, а точка K — середина ребра DD_1.

а) Докажите, что плоскость MKC делит отрезок BB_1 пополам.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MKC, если $\angle MKC=90°$, $\angle ADC=60°$.

Ответ: б) $\dfrac{7\sqrt{10}}{6}$.



№14

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямая призма

б) $\angle MKC=90°$

б) $\angle ADC=60°$

$ABCD$ – р/б трапеция

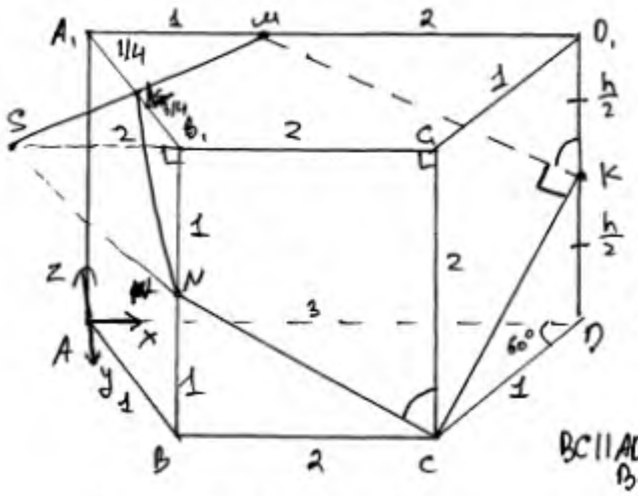
$AD=3$; $BC=2$

$M\in A_1D_1$; $\dfrac{A_1M}{MD_1}=\dfrac{1}{2}$

$K\in DD_1$; $KD=KD_1$

а) Док-ть: (MKC) делит BB_1 пополам

б) Найти: $S_{\text{сеч } MKC}$



Решение:

1) $\dfrac{A_1M}{MD_1}=\dfrac{1}{2}$ и $A_1D_1=3 \Rightarrow$
$A_1M=\frac{1}{3}A_1D_1=\frac{1}{3}\cdot 3=1$
$MD_1=A_1D_1-A_1M=3-1=2$.

2) ~~Соединим~~ Проведем MK в (DD_1A_1)
Проведем KC в (CDD_1).

3) ~~ADD~~ $BC\parallel AD$, т.к. $ABCD$ – трап.

$\left.\begin{array}{l} AD\subset ADD_1 \\ BC\parallel AD \end{array}\right\}$ $BC\parallel ADD_1$ (по призн. паралл. прямой и пл)

$\left.\begin{array}{l} BC\parallel AD;\ CC_1\parallel DD_1 \text{ (т.к. призма прямая)} \\ BC\cap CC_1=C \end{array}\right\} \Rightarrow$

$(BCC_1)\parallel(ADD_1)$ по признаку параллел. плоскостей.

4) $\left.\begin{array}{l} (BCC_1)\parallel(ADD_1), \text{ ~~а (MKC)∩(BCC₁) и MKC ⇒ (MKC)∩~~} \\ (MKC)\cap(ADD_1)=MK \\ (MKC)\cap(B_1C_1C)=CN, \text{ где } N \text{ - точка на пр. } BB_1 \end{array}\right\}$ $MK\parallel CN$ (по св. пл., пересекающ. 2 параллел. плоск.)

5.) В $\triangle KD_1M$ ($\angle KD_1M=90°$ т.к. призма прямая):

$tg\angle D_1KM=\dfrac{2}{(h/2)}=4h$, где за h возьмем высоту призмы

$\left.\begin{array}{l} CC_1\parallel DD_1 \\ NC\parallel MK \end{array}\right\}$ $\angle D_1KM=\angle C_1CN \Rightarrow tg\angle C_1CN=tg\angle D_1KM=4h$

$\angle BCC_1=90° \Rightarrow tg\angle BCN=tg(90°-\angle C_1CN)=ctg\angle C_1CN=\dfrac{1}{tg\angle C_1CN}=\dfrac{1}{4h}$.

Тогда в $\triangle CBN$ ($\angle CBN=90°$, т.к. призма прямая):

Тогда в $\triangle CBN$ ($\angle CBN = 90°$, т.к. призма прямая):

$$\cancel{tg\angle CBN}\ tg\angle BCN = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{4h} \Rightarrow BN = \frac{BC}{4h} = \frac{2}{4h} = \frac{h}{2}$$

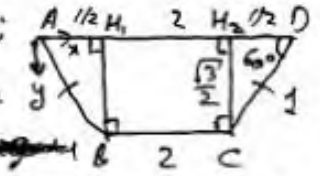
Т.к. $BB_1 = h$ как высота, а $BN = \frac{h}{2}$, то $B_1N = BB_1 - BN = h - \frac{h}{2} = \frac{h}{2}$ и

$BN = B_1N = \frac{h}{2}$, т.е. N – середина BB_1. Ч.Т.Д.

б) Соединим C и N в (CBB_1).

1) Воспользуемся методом координат. Пусть ось X – ~~вдоль AD(к D)~~ вдоль AD (от A к D); ось Y – ~~вдоль~~ перпендик. AD в пл. (ABC); ось Z – вдоль AA_1 от A к A_1 (см. рисунок), а т. A – начало коорд. Тогда

$A(0;0;0)$; $D(3;0;0)$; $A_1(0;0;h)$; $D_1(3;0;h)$;



В трап. $ABCD$ проведем перпендикуляры BH_1 и CH_2

Т.к. $AB = CD$ по усл., то $\triangle AH_1B = \triangle DH_2C$ по ~~катету~~ (гк) катету ($BH_1 = CH_2$) и гипотенузе ($AB = CD$). Отсюда $AH_1 = DH_2$

~~$AH_1 = DH_2$~~ $H_1H_2 = BC = 2$ (H_1H_2CB – прямоуг. по 4 прямым углам)

$AH_1 = DH_2 = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$

В $\triangle AH_1B$ и $\triangle DH_2C$: $BH_1 = CH_2 = tg60° \cdot H_2D = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

А $AB = DC = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1$.

Тогда $B\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$; $C\left(\frac{5}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$; $B_1\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; h\right)$; $C_1\left(\frac{5}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; h\right)$.

Далее: $\cancel{\frac{AM}{MD_1}}$ $M(1; 0; h)$; $K\left(3; 0; \frac{h+0}{2}\right) = K\left(3; 0; \frac{h}{2}\right)$ как середина DD_1

По теореме Пифагора в $\triangle MD_1K$ ($\angle MD_1K = 90°$): $MK = \sqrt{4 + \frac{h^2}{4}} = \sqrt{\frac{16+h^2}{4}}$

По теореме Пифагора в $\triangle CDK$ ($\angle CDK = 90°$): $CK = \sqrt{1 + \frac{h^2}{4}} = \sqrt{\frac{4+h^2}{4}}$

По теореме Пифагора в $\triangle MKC$ ($\angle MKC = 90°$ по усл.): $MC = \sqrt{\frac{16+h^2}{4} + \frac{4+h^2}{4}} = \sqrt{\cancel{\frac{20+h^2}{4}}}$

$= \sqrt{\frac{20+2h^2}{4}} = \sqrt{\frac{10+h^2}{2}}$.

Найдем MC координатным способом: ~~$MC =$~~

$$MC = \sqrt{\left(\frac{5}{2}-1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}-0\right)^2 + (h-0)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4} + h^2} = \sqrt{\frac{12}{4} + h^2} = \sqrt{3+h^2}.$$

Итак, $MC = \sqrt{\frac{10+h^2}{2}} = \sqrt{3+h^2} \Rightarrow \frac{10+h^2}{2} = 3 + h^2 \Rightarrow 5 + \frac{h^2}{2} = 3 + h^2 \Rightarrow$

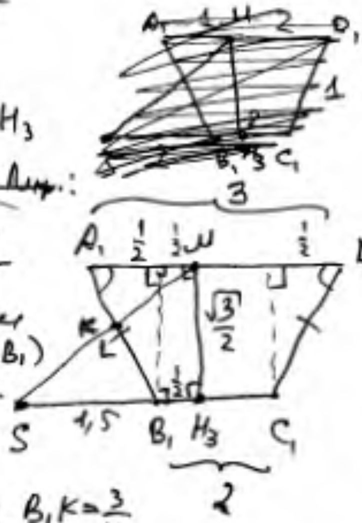
$\frac{h^2}{2} = 2 \Rightarrow h^2 = 4 \Rightarrow h = \pm 2$ (-2 не уд. усл.) ~~$h = 4$~~. $\boxed{h = 2}$

Продлим CN до пересеч. с B_1C_1 (в пл. B_1C_1C). Пусть $CN \cap B_1C_1 = L$.

$\triangle SNB_1 \sim \triangle SCC_1$ по ~~катету~~ острому углу ($\angle S$ – общий) $\Rightarrow \frac{SB_1}{SC_1} = \frac{NB_1}{CC_1} = \frac{1}{2}$

$\frac{SB_1}{SC_1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{SB_1}{SB_1 + B_1C_1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{SB_1}{SB_1+2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2SB_1 = SB_1 + 2$

$\underline{SB_1 = 2}$



Из M опустим перпендик. на B_1C_1: MH_3

$B_1H_3 = \frac{1}{2}$; $B_1S = 1{,}5$;

Пусть $AB_1 \cap MS = L$

$\triangle A_1KM \sim \triangle B_1KS$ по 2 углам ($\angle MA_1K = \angle KB_1S$ как н/л прил. $\parallel A_1D_1$ и B_1C_1, секущая A_1B_1), $\angle A_1KM = \angle B_1KS$ как вертик.

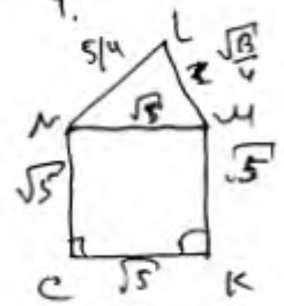
Следовательно, $\frac{A_1M}{SB_1} = \frac{AK}{B_1K} = \frac{1}{2} : \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$AB_1 = 1 \Rightarrow AK = \frac{1}{4}AB_1 = \frac{1}{4}$; $B_1K = \frac{3}{4}$.

Соединим MK и KN.

$MK = \sqrt{\frac{16+h^2}{4}} = \sqrt{\frac{16+4}{4}} = \sqrt{\frac{20}{4}} = \sqrt{5}$

$CN = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$;



Комментарий.

Доказательство утверждения в пункте *а* не обосновано – неверно найден $\operatorname{tg}\angle D_1KM = 2 : (0{,}5h) = 4h$. Решение пункта *б* не завершено.

Оценка эксперта: 0 баллов.

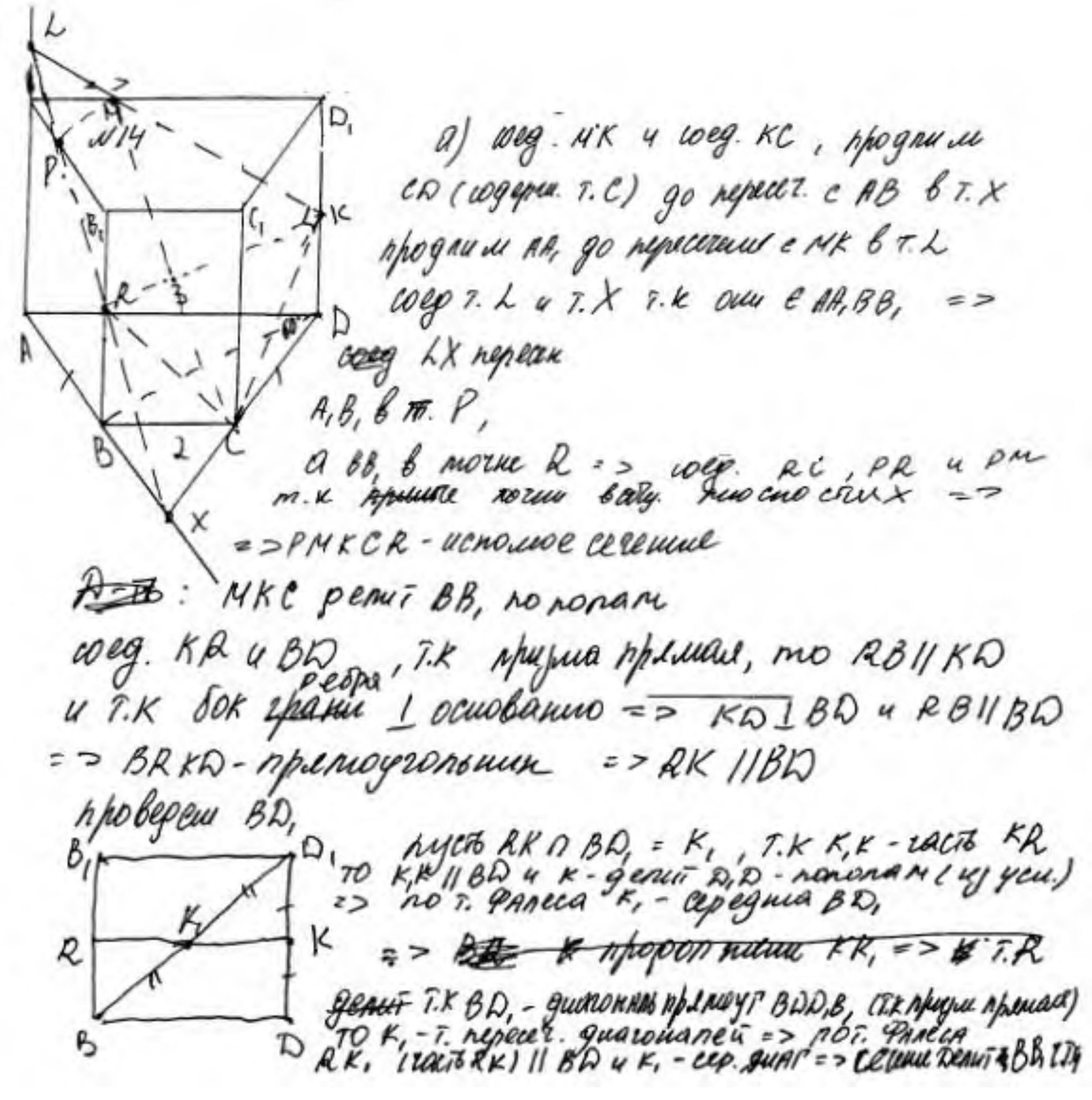
Пример 14.1.3

В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD=3$ и $BC=2$. Точка M делит ребро A_1D_1 в отношении $A_1M:MD_1=1:2$, а точка K — середина ребра DD_1.

а) Докажите, что плоскость MKC делит отрезок BB_1 пополам.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MKC, если $\angle MKC=90°$, $\angle ADC=60°$.

Ответ: б) $\dfrac{7\sqrt{10}}{6}$.



Комментарий.

Доказательство утверждения в пункте *а* не обосновано, пункт *б* не выполнен.

Оценка эксперта: 0 баллов.

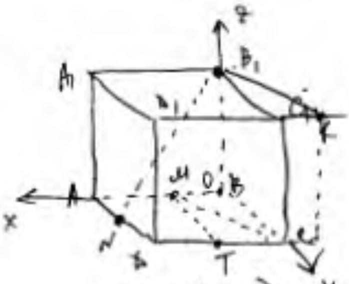
Пример 14.2.1

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M и N — середины рёбер AB и AD соответственно.

а) Докажите, что прямые B_1N и CM перпендикулярны.

б) Плоскость α проходит через точки N и B_1 параллельно прямой CM. Найдите расстояние от точки C до плоскости α, если $B_1N = 6$.

Ответ: б) $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.



а) Введем ПСК $oxyz$, Направив Ox по BA, Oy – по BC, Oz по BB_1. Пусть сторона куба $= a$, тогда

M – середина AB по усл

$B_1(0;0;a)$ $N(a;\frac{a}{2};0)$ $C(0;a;0)$ $M(\frac{a}{2};0;0)$

$\overline{B_1N}(a;\frac{a}{2};-a)$ $\overline{CM}(\frac{a}{2};-a;0)$

$\cos(\overline{B_1N};\overline{CM}) = \dfrac{\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{2}}{\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}+a^2}\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}} = 0 \Rightarrow \angle(B_1N;CM) = 90° \Rightarrow B_1N \perp CM$ ч.т.д.

б) Т.к. плоскость $\alpha \parallel CM$, проведем $B_1K \parallel CM$, тогда плоскость $\alpha = (B_1NK)$

$B_1C_1 = MT$ (T – сер DC) $\Rightarrow K(-\frac{a}{2};a;a)$, пусть $\bar{n}$ – нормаль α.

$\angle B_1C_1K = \angle MTC = 90°$

$B_1K \parallel MC$ $B_1N = 6$ $B_1N = \sqrt{(a-0)^2+(\frac{a}{2}-0)^2+(0-a)^2} = \sqrt{2a^2+\frac{a^2}{4}} = \frac{3a}{2} = 6$ $a = 4$

$MT \parallel B_1C_1$

$\rho(C;\alpha) = \dfrac{|\overline{CB_1}\cdot\bar{n}|}{|\bar{n}|}$ пусть $\bar{n}(x;y;z)$, тогда $\begin{cases} 4x+2y-4z=0 \\ -2x+4y=0 \end{cases}$ Пусть $x=1 \Rightarrow y=\frac{1}{2}; z=\frac{5}{4}$

$\triangle B_1C_1K = \triangle CMT$ $\overline{B_1N}(4;2;-4)$ $\bar{n}(1;\frac{1}{2};\frac{5}{4})$

$\overline{B_1K}(-2;4;0)$

по стороне и 2м прилеж углам

$\overline{CB_1}(0;-4;4)$ $\rho(C;\alpha) = \left|\dfrac{-4\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{5}{4}}{\sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{25}{16}}}\right| = \left|\dfrac{3}{\sqrt{\frac{45}{16}}}\right| = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$

Ответ: б) $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$

Комментарий.

Верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*.

Оценка эксперта: 3 балла.

Пример 14.2.2

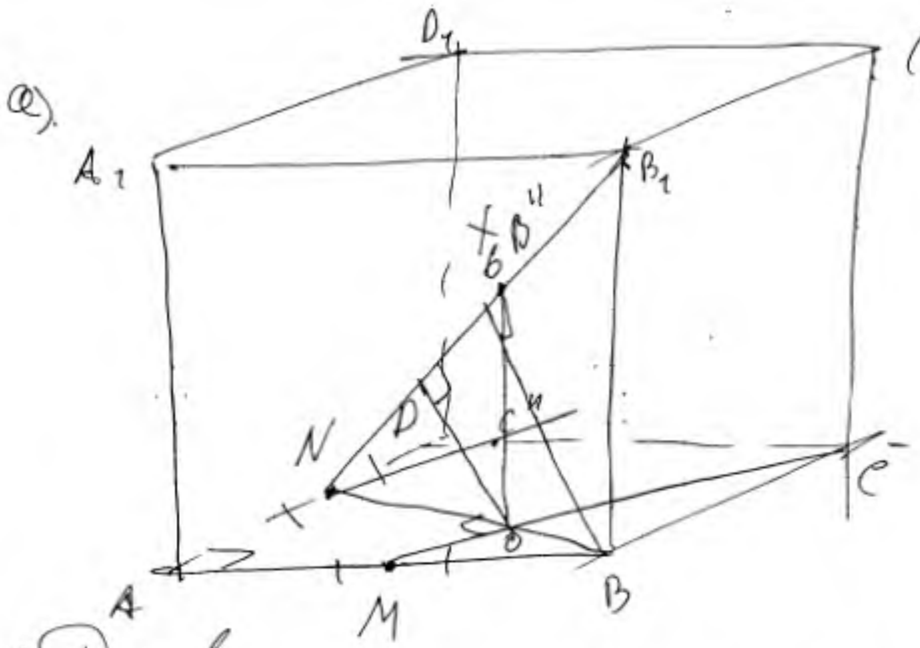
В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M и N — середины рёбер AB и AD соответственно.

а) Докажите, что прямые B_1N и CM перпендикулярны.

б) Плоскость α проходит через точки N и B_1 параллельно прямой CM. Найдите расстояние от точки C до плоскости α, если $B_1N = 6$.

Ответ: б) $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.

а).

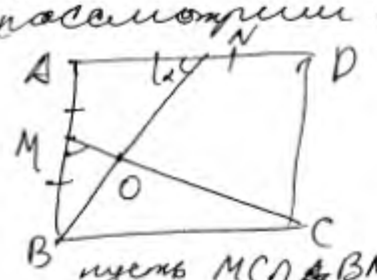


а). Док-во.

проведем проекцию NB_1 на $(ABCD)$

чтобы $NB_1 \perp$ было CM необходимо по теореме о 3х $\perp$ чтобы $NB \perp MC$.

рассмотрим квадрат $ABCD$



пусть $MC \cap BN = O$

пусть $\angle BMC = \alpha$, тогда т.к. $\triangle ABN = \triangle BMC$, $\angle ANB = \angle BMC$

тогда $\angle AMO = 180^\circ - \alpha$.

т.к. $\angle AMO + \angle ANO = 180^\circ \Rightarrow$ вокруг четырех-к $NOMA$ можно описать окр $\Rightarrow \angle MAN + \angle MON = 90^\circ \Rightarrow \angle MON = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow MC \perp BN \Rightarrow$ по теореме о 3х $\perp$ $NB_1 \perp MC$.

б) $B_1N = 6$

пусть ребро и сторона куба $= 2a$, тогда $NB^2 = a^2 + 4a^2 = 5a^2$, а $B_1N^2 = 5a^2 + 4a^2 = 9a^2 \Rightarrow 36 = 9a^2 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 4$

т.к. $(\alpha) \parallel CM$ и содержит $NB_1 \perp MC \Rightarrow (\alpha) \perp CM$, тогда расстояние от C до (α) = расст от точки O до NB_1 и пусть оно равняется h.

проведем XB – высоту в $\triangle NBB_1$, проведем $B''O$ – $\perp$

Рассмотрим $2\triangle$, $NB''O$ и NB_1B, они подобны по 2м $\angle$, т.к. $\angle NB''O = \angle NB_1B$ и $\angle NOB'' = \angle NBB_1$

тогда $\dfrac{h}{XB} = \dfrac{NO}{NB}$

$NB = \cancel{\sqrt{20}} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$

$NO = NB - OB$

$OB = \dfrac{MB \cdot BC}{MC} = \dfrac{2 \cdot 4}{\sqrt{20}} = \dfrac{8}{\sqrt{20}}$; $NO = \dfrac{\sqrt{20}}{1} - \dfrac{8\sqrt{20}}{20} = \dfrac{3\sqrt{20}}{5}$

$XB = \dfrac{NB \cdot B_1B}{NB_1} = \dfrac{\sqrt{20} \cdot 4}{6} = \dfrac{2\sqrt{20}}{3}$

тогда

$\dfrac{3h}{2\sqrt{20}} = \dfrac{3\sqrt{20}}{5} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{20}} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow 3h = \dfrac{2\sqrt{20} \cdot 3}{5} = \dfrac{2 \cdot 2\sqrt{5}}{5} = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

Ответ: б) $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

Комментарий.

Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*.

При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ не из-за арифметической ошибки – длина ребра куба найдена неверно.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 14.2.3

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M и N — середины рёбер AB и AD соответственно.

а) Докажите, что прямые B_1N и CM перпендикулярны.

б) Плоскость α проходит через точки N и B_1 параллельно прямой CM. Найдите расстояние от точки C до плоскости α, если $B_1N = 6$.

Ответ: б) $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.

Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб; M – сер. AB; N – сер. AD

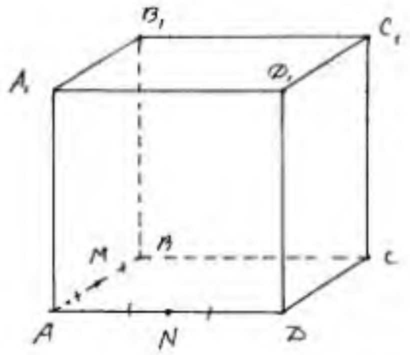
а) Доказать: $B_1N \perp CM$

б) $\{N; B_1\} \in \alpha$; $\alpha \parallel CM$

$B_1N = 6$

$\rho(C, \alpha)$ – ?

а)



$$\overrightarrow{B_1N} = \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A_1A} + \frac{\overrightarrow{AD}}{2}$$

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{AD} + \frac{\overrightarrow{BA}}{2}$$

$$\overrightarrow{B_1N} \cdot \overrightarrow{CM} = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A_1A} + \frac{\overrightarrow{AD}}{2}\right)\left(-\overrightarrow{AD} + \frac{\overrightarrow{BA}}{2}\right) =$$

$$= -\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{A_1A}\cdot\overrightarrow{AD} - \frac{AD^2}{2} + \frac{BA^2}{2} + \frac{\overrightarrow{A_1A}\cdot\overrightarrow{BA}}{2} + \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AD}}{4}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AD} = 0, \text{ т.к. } BA \perp AD \\
\overrightarrow{A_1A}\cdot\overrightarrow{AD} = 0, \text{ т.к. } A_1A \perp AD \\
\dfrac{-AD^2 + BA^2}{2} = 0, \text{ т.к. } AD = BA \\
\dfrac{\overrightarrow{A_1A}\cdot\overrightarrow{BA}}{2} = 0, \text{ т.к. } A_1A \perp BA \\
\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AD}}{4} = 0, \text{ т.к. } BA \perp AD
\end{array}\right\}
\quad
\begin{array}{c}
\underbrace{\overrightarrow{B_1N}\cdot\overrightarrow{CM} = 0} \\
\Downarrow \\
B_1N \perp CM \\
(\overrightarrow{B_1N} \neq \vec{0} \\
\overrightarrow{CM} \neq \vec{0})
\end{array}$$

б) 1) Пусть a — сторона куба, $a>0$

По т. Пифагора в $\triangle B_1BN$, $B_1N^2 = B_1B^2 + BN^2$

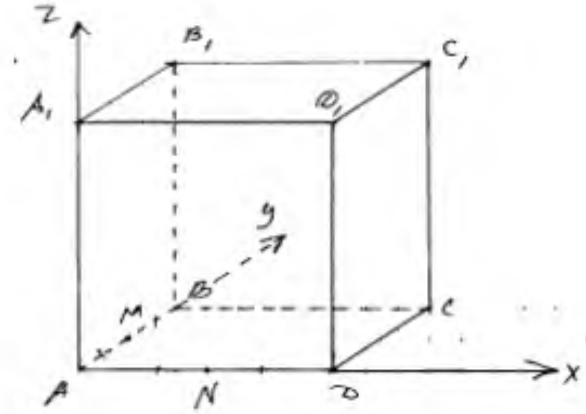
По т Пифагора в $\triangle BAN$, $BN^2 = BA^2 + AN^2$

$$B_1N^2 = B_1B^2 + BA^2 + AN^2$$

$$36 = a^2 + a^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$36 = \frac{9a^2}{4} \Rightarrow a = 4$$

2)



Введём ортогональную систему координат

$C(4;4;0)$ $\quad B_1(0;4;4)$ $\quad N(2;0;0)$ $\quad M(0;2;0)$

$\overrightarrow{MC}\,(x_c - x_m;\ y_c - y_m;\ z_c - z_m)$ $\quad \overrightarrow{MC}(4;2;0)$

Т.к. $\alpha \parallel MC$, то т. $P(x_N + x_{\overrightarrow{MC}};\ y_N + y_{\overrightarrow{MC}};\ z_N + z_{\overrightarrow{MC}}) \in \alpha$

$P(6;2;0)$

3) Найдём ур-ие α:

$$\begin{cases} a x_{B_1} + b y_{B_1} + c z_{B_1} + d = 0 \\ a x_N + b y_N + c z_N + d = 0 \\ a x_P + b y_P + c z_P + d = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4b + 4c + d = 0 \\ 2a + d = 0 \\ 6a + 2b + d = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} a = -\dfrac{d}{2} \\ -3d + 2b + d = 0 \\ 4b + 4c + d = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{d}{2} \\ b = d \\ c = -\dfrac{5}{4}d \end{cases}$$

$-\frac{x}{2}+y-\frac{5}{4}z+1=0$

$2x-4y+5z-4=0$ – ур-ие α.

$\vec{n}(2;-4;5)$ – вектор нормали к α.

4) Пусть т. H – основание перпендикуляра, опущенного из т. C на α.

Тогда, $\overrightarrow{CH}=(x_H-x_C;\ y_H-y_C;\ z_H-z_C)$

$\overrightarrow{CH}=(x_H-4;\ y_H-4;\ z_H)$

Т.к. $CH\perp\alpha$, $\overrightarrow{CH}=k\vec{n}$; $k\in R$

$x_H-4=2k \to x_H=4+2k$

$y_H-4=-4k \to y_H=4-4k$

$z_H=5k$

Т.к. $H\in\alpha$, $2x_H-4y_H+5z_H-4=0$

$2(4+2k)-4(4-4k)+5\cdot5k-4=0$

$8+4k-16+16k+25k-4=0$

$45k=12$

$k=\frac{4}{15}$

5) $\rho(C;\alpha)=|\overrightarrow{CH}|=k|\vec{n}|=\frac{4}{15}\cdot\sqrt{4+16+25}$

$\rho(C;\alpha)=\frac{4}{15}\sqrt{45}=\frac{12\sqrt{15}}{15}=\frac{4}{5}\sqrt{15}$

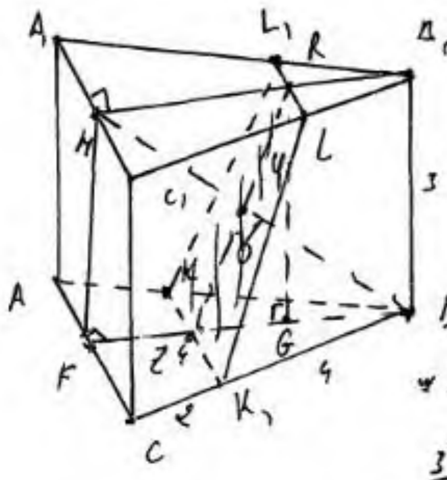
Ответ: $\cancel{\frac{12\sqrt{15}}{15}}$ $\frac{4\sqrt{15}}{5}$

Комментарий.

Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ не из-за арифметической ошибки. В предпоследней строке неверно вынесен множитель из-под корня.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 14.3.1



Решение.

$BF = \sqrt{BC^2 - FC^2} =$
$= \sqrt{36-9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$
$FM \perp AC$, $FM = B_1B$
$BM = \sqrt{FM^2 + BF^2} =$
$= \sqrt{9+27} = \sqrt{36} = 6$

$\triangle BZK_1 \sim \triangle FBC$: $\frac{BF}{BZ} = \frac{CB}{K_1B}$

~~$\frac{3\sqrt{3}}{BZ} = \frac{4}{6}$; $4BZ = 18\sqrt{3}$~~ ; $BZ =$

$\frac{3\sqrt{3}}{BZ} = \frac{6}{4}$ $6BZ = 12\sqrt{3}$

[redacted]

Дано

$ABCA_1B_1C_1$ – прав. треуг. призм.

$AA_1 = 3$; $AB = 6$; $AK = 2$;

$B_1L = 2$. $A_1M = MC_1 = 3$.

φ – плоскость $\parallel AC$ и

прям. содержащая K_1L.

а) Док-ть $BM \perp \varphi$

б) $V = AKK_1LL_1$

$RG \parallel B_1B$ $RG = B_1B$. $ZG = FB - (FZ + GB)$ $FZ = GB = \sqrt{3} = \frac{1}{3}ZB$

$ZG = 3\sqrt{3} - (\sqrt{3} + \sqrt{3}) = \sqrt{3}$. $RZ = \sqrt{RG^2 + ZG^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

~~$\triangle BFM \sim \triangle BOZ$ по общ. $\angle MBF$ и $BO = OM$ т.к. $RB_1 = FZ$~~

$\triangle ZOB = \triangle MOR$ т.к. $\angle MOR = \angle ZOB$ (т.к. они вертикальные),

$ZB = MR = 2\sqrt{3}$, $\angle ZBM = \angle OMR$ т.к. это внутр. накрест. леж. углы

при 2-ух ~~пр~~ $\parallel$ прям. B_1M и FB. след. след. $RO = OZ$

По теорем пифагор. $ZB = \sqrt{BO^2 + ZO^2}$; $2\sqrt{3} = \sqrt{9+3}$ $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$ $2\sqrt{3}$

след $\triangle BZO$ – прямоуг.: след $BO \perp ZR$. след $BO \perp \varphi$ след $BM \perp \varphi$.

$V = \frac{1}{3} MO \cdot S_{KK_1LL_1} = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \left(\left(\frac{KK_1 + LL_1}{2}\right) \cdot RZ\right) = 1 \cdot \left(\left(\frac{2+4}{2}\right) \cdot 2\sqrt{3}\right) = 12\sqrt{3}$

$= 1 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

~~Ответ: $12\sqrt{3}$.~~

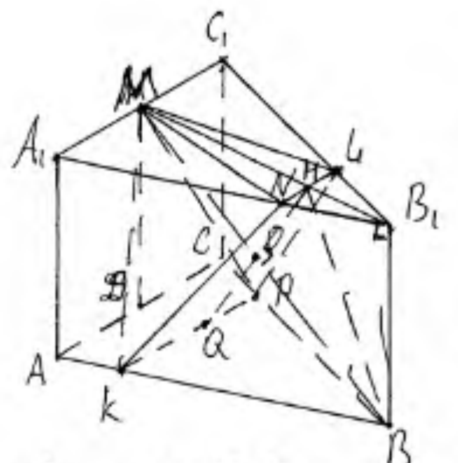
№17. Ответ: $6\sqrt{3}$.

Комментарий.

Доказательство утверждения в пункте *а* не обосновано. С использованием утверждения пункта *а* верно получен ответ в пункте *б*.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 14.3.2



а) BM перпендикулярна любой прямой, параллельной AC и лежащей в плоскости (ABC) по теореме о 3-х перпендикулярах $\Rightarrow BM \perp PK$

Проведём QH ($QH \perp NL$ и $QH \perp KP$; $QH \cap BM = O$) $\triangle OHM \sim \triangle B_1BM$ по I призн. $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle MOH = \angle MB_1B = 90°$. Т.к. $BM \perp PK$ и $BM \perp QH \Rightarrow$
$\Rightarrow BM \perp \gamma$. ч.т.д.

б) (·)O делит BM пополам. Из $\triangle BMB_1$ по т. Пифагора $BM = 6 \Rightarrow BO = 3$. Из $\triangle B_1LH$ по т Пифагора $B_1H = \sqrt{3}$. Из $\triangle BHB_1$ по т Пифагора $BH = 2\sqrt{3}$. Из $\triangle BOH$ по т. Пифагора $OH = \sqrt{3}$. (·)O делит QH пополам $\Rightarrow QH = 2OH =$
$= 2\sqrt{3}$

$V_{MKPLN} = \frac{1}{3} \cdot MO \; S_{KPLN} = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{2+4}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

($KPLN$ – р/б трапеция)

Ответ: $6\sqrt{3}$

Комментарий.

Утверждение в пункте *а* не доказано. В основе решения пункта *б* лежит необоснованное утверждение.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 14.3.3

3) $\triangle BOK \sim \triangle BCA$ по 2-м углам ($\angle B$-общий, $\angle BKO = \angle BAC$ как соотв.) $k_1 = \frac{2}{3}$ 4) аналогично $\triangle B_1EL \sim \triangle B_1A_1C_1$ $k_2 = \frac{1}{3}$

5) из (3) и (4) $B_1O_1 = \frac{1}{3} B_1M$ $BO = \frac{2}{3} BF$

6) $O_1M = B_1M - B_1O_1 = B_1M - \frac{1}{3} B_1M = \frac{2}{3} B_1M = \frac{2}{3} BF$

7) $\triangle O_1HM = \triangle BOH$ по 2-м углам и стороне между ними ($\angle MO_1H = \angle HOB$ как нак.леж. $\angle O_1MB = \angle MBO$ как н.л. $O_1M = \frac{2}{3} B_1M = \frac{2}{3} BF = BO$)

Вычисление

1) а) $B_1M = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ 2) $O_1M = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

3) $O_1T \perp BF$ в (BFM) 4) $TO = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$

5) по т. Пиф. $BM = \sqrt{9+27} = 6 \Rightarrow HM = BH = \frac{1}{2} \cdot BM = 3$.

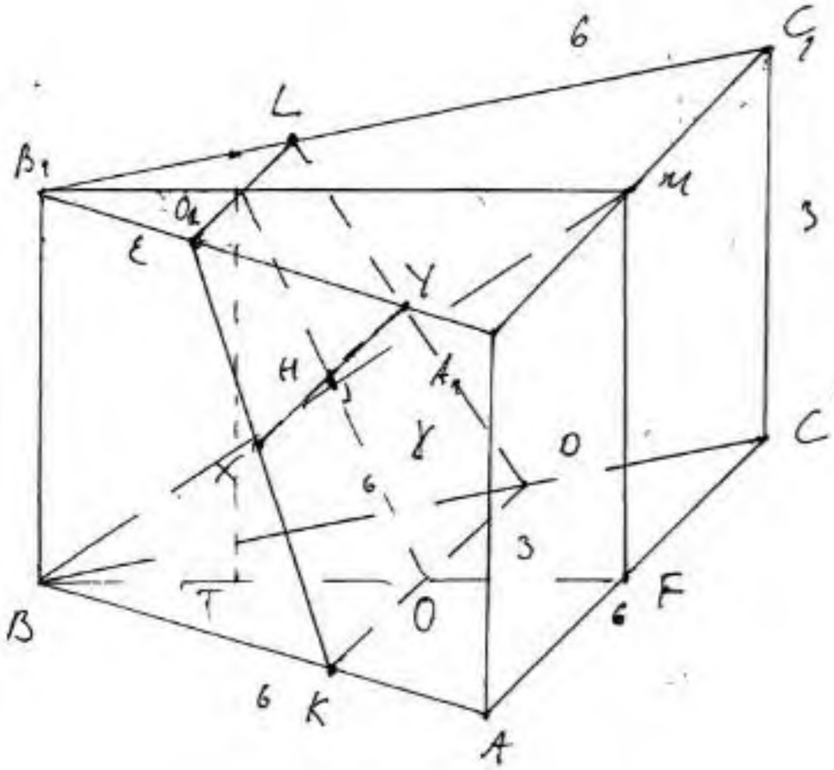
6) $O_1O = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3} \Rightarrow O_1H = HO = \sqrt{3}$.

7) по теор. обратной теореме Пифагора т.к. $O_1M^2 = O_1H^2 + HM^2 = 9 + 3 = 12$, то $\angle O_1HM = 90°$ и $O_1H \perp MH$.

8) $MF \perp AC$ (т.к призма правильная) и $MF \perp KD$ т.к. $KD \parallel AC$

9) т.к. $EL \parallel KD$, то $ELKD$ – трапеция

10) XY – средняя линия тр. $ELKD$ и $O_1H = HO \Rightarrow H \in XY$ в плоскости $(EKD$ [redacted] См. на обороте



12) $XY \parallel KD$ $MF \perp KD$ и $MF \perp BF$, ~~тогда по ТТП~~ ~~$KD \perp M$~~ ~~$MH \perp KD$~~. тогда по признаку перп. пр. и пл. $KD \perp (BFM) \Rightarrow$ любая прямая в пл. (BFM) перпендикулярна $KD \Rightarrow BM \perp KD$ и $BM \perp XY$

12.1) $(KDL) = \gamma$

13) т. к. $BM \perp XY$ и $BM \perp O_1O$, то по признаку перп. пр. и пл. $BM \perp (KDL)$ ~~ч.т.д.~~ и $BM \perp \gamma$ ч.т.д.

б) 1) $S_{LEKD} = \frac{1}{2}(EL + KD) \cdot O_1O$

2) $EL = A_1C_1 \cdot k_2 = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2$

3) $KD = AC \cdot k_1 = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4$

4) $S_{LEKD} = \frac{1}{2}(2+4) \cdot 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

5) $V_{MLEKD} = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot h = 6\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot MH = 6\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 = 6\sqrt{3}$

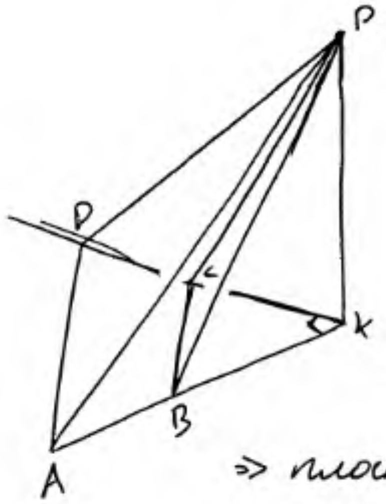
Ответ: $6\sqrt{3}$ куб.ед.

Комментарий.

Доказательство утверждения в пункте *а* содержит неточности. В решении пункта *б* обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 3 балла.

Пример 14.4.1



а) $\angle BAD + \angle AD\cancel{K}C = 90^\circ \Rightarrow \angle DKB = 90^\circ$.

$\left.\begin{array}{l} \text{плоск.}(DKP) \perp \text{плоск}(ADK) \\ AK \perp DK \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow AK \perp \cancel{DPK}\ \text{пл.}(DPK) \Rightarrow$

$AK \subset \text{пл.}(AKP) \Rightarrow \text{пл.}(AKP) \perp \text{пл.}(DPK) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ плоскости $PAB \perp$ пл-ти PCD.

б) $AB = BC = CD = 4$.

$AB = CD \Rightarrow$ трапеция - равн.бедр. $\Rightarrow \angle KAD = \angle ADK \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle KBC = \angle BCK \Rightarrow BK = CK = \frac{CB}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

$AK \perp \text{пл.}(DPK) \Rightarrow AK \perp PK$.

$\left.\begin{array}{l} \text{пл.}(AKP) \perp \text{пл.}(ADK) \\ AK \perp DK \end{array}\right\} \Rightarrow DK \perp \text{пл.}(APK) \Rightarrow DK \perp PK$

$\left.\begin{array}{l} AK \perp PK \\ DK \perp PK \end{array}\right\} \Rightarrow PK \perp \text{пл.}(ADK) \Rightarrow PK$ - высота.

$V(KBCP) = \frac{1}{3} \cdot PK \cdot \frac{1}{2} \cdot CK \cdot BK = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} =$

$= 3 \cdot 4 = 12$.

Ответ: $V_{KBCP} = 12$.

Комментарий.

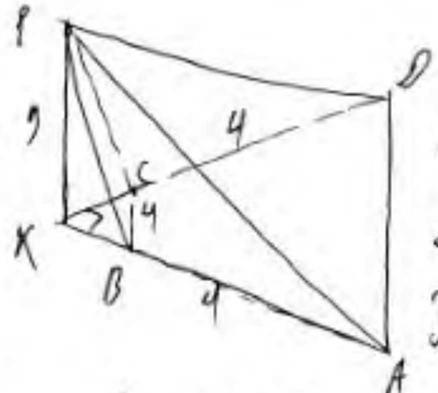
Утверждение в пункте *а* не доказано. В решении пункта *б* обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 14.4.2

Дано:
PABCD – 4р. пирамида
ABCD – трапеция (AD ∥ BC)
$\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$
$AB \cap CD = K$

а) Доказать: $PAB \perp PCD$
б) Найти: V_{KBPC}, если $AB = BC = CD = 4$, $PK = 9$



а) PK – высота пирамиды
$\angle DKA = 180^\circ - (\angle BAD + \angle ADC) = 90^\circ$
Заметим, что $\angle DKA$ – линейный угол двугранного угла между плоскостями PAB и PCD, т.к. $DK \perp PK$ и $AK \perp PK$.
$\angle DKA = 90^\circ \Rightarrow PAB \perp PCD$, ч.т.д.

б) $AB = BC = CD = 4 \Rightarrow AD = 8$;
$S_{ABCD} = \frac{4+8}{2}\sqrt{12} = 6 \cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$
$BC = \frac{AD}{2} \Rightarrow \Delta KCB \overset{\frac{1}{2}}{\sim} \Delta KDA \Rightarrow S_{KCB} = \frac{S_{AKD}}{4} \Rightarrow$
$\Rightarrow S_{KCB} = \frac{12\sqrt{3} + S_{KCB}}{4} \Leftrightarrow \frac{3S_{KCB}}{4} = 3\sqrt{3} \Rightarrow S_{KCB} = 4\sqrt{3}$
$V_{PKCB} = \frac{1}{3} PK \cdot S_{KCB} = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 4\sqrt{3} = 3 \cdot 4\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$.

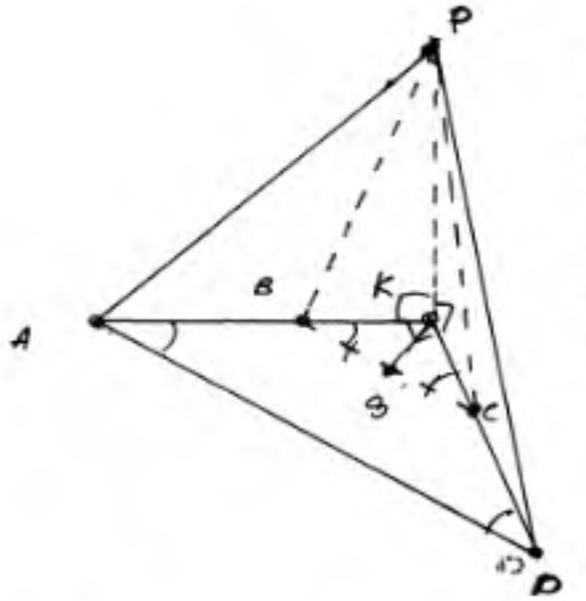
Ответ: $12\sqrt{3}$

Комментарий.

Утверждение в пункте *а* не доказано. В решении пункта *б* есть ошибочное утверждение, что привело к неверному ответу.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 14.4.3



Дано:
$\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$
$(PAB) \perp (ADK)$
$(PCD) \perp (ADK)$
$ABCD$ – трапеция
$K = AB \cap CD$

а) Док-ть: $PAB \perp PCD$

б) $V_{KBCP} = ?$, если:

$AB = BC = CD = 4$
$PK = 9$

а) $BC \parallel AD$ (т.к $ABCD$ – трапеция) $\Rightarrow \begin{cases} \angle KBC = \angle KAD \\ \angle KCB = \angle KDA \end{cases}$

(как ~~внутр. одностор и внутр. внешн~~ одностор внешн. и внутр. при секущей AK? и KD)

$\Rightarrow \angle KBC + \angle KCB = 90^\circ$ (по условию $\angle BAD + \angle ABC = 90^\circ$)

$\Rightarrow \angle BKC = 90^\circ$ $(180^\circ - \angle KBC - \angle KCB = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ)$

Т.к $PAB \perp ADK$ и $PKD \perp ADK$, то

$\angle AKP = \angle DKP = 90^\circ \Rightarrow AK \perp PK$ и $AK \perp DK \Rightarrow$

$\Rightarrow PAK \perp PKD$ ч.т.д.

б) $AB = CD \Rightarrow ABCD$ – равнобокая трапеция.
$\angle BAD + \angle CDA = 90^\circ$
$\angle BAD = \angle CDA$ (как углы при основании равнобок. трап.)
$\Rightarrow \angle KBC = \angle KCB = 45^\circ$

$\Rightarrow \Delta KBC$ – равнобедр. прямоугольный треуг.
Опустим из K перпендикуляр на BC; $KS \perp BC$; $BS = BC$
(медиана = высоте в равнобедр Δ) $\Rightarrow BS = 2$

$KB = \frac{BS}{\cos 45^\circ} = \frac{2}{\cos 45^\circ} = 2\sqrt{2} = KC \Rightarrow S_{\Delta BKC} = \frac{1}{2}(2\sqrt{2})^2 = 4$

$V_{KBCP} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta BKC} \cdot KP = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 4 = 12$ Ответ: 12.

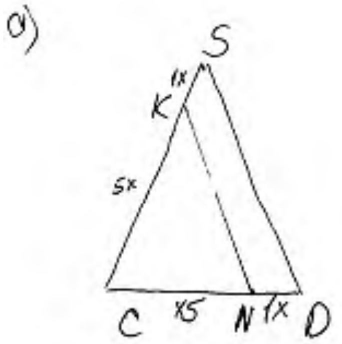
Комментарий.

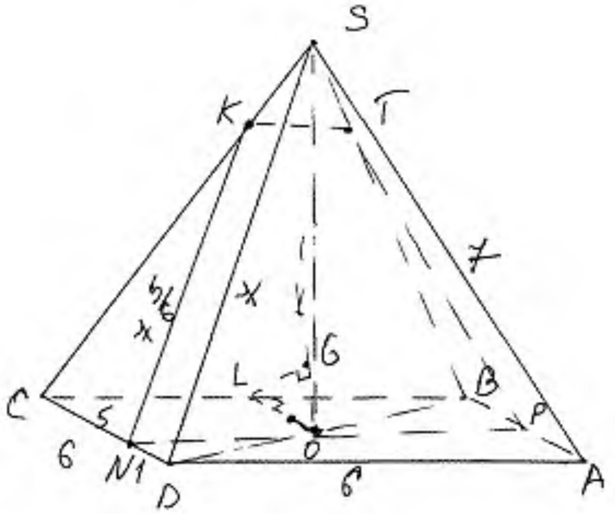
Утверждение в пункте *а* не доказано. В решении пункта *б* обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 14.5.1

а)





$\triangle CNK \sim CDS$
(теорема Фалеса)
$\Rightarrow NK \parallel DS$; (~~BSA~~) $DS \in (DSA) \Rightarrow NK \parallel (DSA)$
Проведём $NP \parallel DA$. Построим $PT \parallel SA$
($SA \in (DSA) \Rightarrow (NPT) \parallel (SDA)$; $(NPT) = (\alpha)$
$\Rightarrow (\alpha) \parallel (SDA)$ Прямая $NP \parallel AD$ (по
построению) $DA \parallel CB$ (т. к. SABCD – правильная
пирамида) $\Rightarrow NP \parallel CB$, т.к. $NP \in (\alpha) \Rightarrow$
$(\alpha) \parallel CB$ ч.т.д.
б) Построим $LO \perp CB$; $LO \in CB$. (O – т. пересечение диаг осн пирамиды)
Построим $\perp LG$ к (α) LG – растояние
до (α) (теорема о 3-х перпендикулярах) (
LG – перпендиуляр; OG – проекция; LO – касательная.

Комментарий.

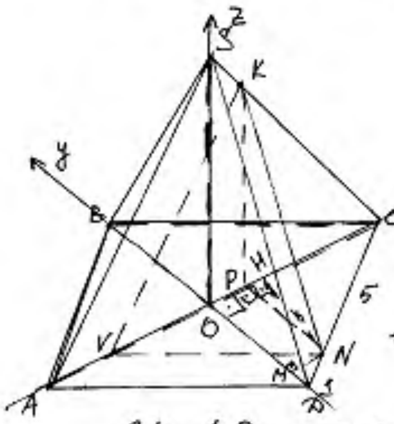
Утверждение в пункте *а* доказано. В решении есть неточности в обозначении длин отрезков на первом чертеже и неоднозначность использования ссылки на теорему Фалеса. Решение пункта *б* не закончено.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 14.5.2

1) SABCD – правильная ~~на~~ четырехугольная пирамида ⇒

⇒ 1. Основание правильный ~~четырех~~угольник, т.е квадрат, 2 ~~то~~ высота пирамиды проецируется в центр основания, т.е в точку ∩ диагоналей квадрата, 3 боковые стороны равны, 4. боковые грани равные р/б ∆ треугольники (р/б - равнобедренные)



2) В (ASC). KV ∥ AS

Р! ∆ ASC и ∆ CKV.

1 ∠ SCA - общий
2 ∠ KVC = ∠ SAC как соответственные углы, образованные KV ∥ AS и секущей AC ⇒

⇒ ∆ ASC ∾ ∆ CKV по 1 признаку ⇒

⇒ $\frac{CK}{CS} = \frac{CV}{AC}$ (у квадрата $AC = a\sqrt{2} = BD = 6\sqrt{2}$ как диагональ)

$CK : KS = 5:1$ по условию ⇒ $CK = \frac{7 \cdot 5}{6}$, $SK = \frac{7}{6}$ ⇒

⇒ $\frac{7 \cdot 5}{6 \cdot 7} = \frac{CV}{6\sqrt{2}}$ ⇒ $CV = 5\sqrt{2}$ ⇒ $OV = 2\sqrt{2}$ ($CO = 3\sqrt{2} = OB = OD = AO$)

3) ~~(KNV~~ KV ⊂ (KNV); KV ∥ AS; AS ⊄ (KNV) ⇒ AS ∥ (KNV)

(KNV) содержит т. K и N и ∥ AS ⇒ (KNV) искомая плоскость α

4) В грани ABCD : NH ⊥ OC и NM ⊥ OD

Р! пр/уг ∆ CHN: ∠ HCN = 45° т.к AC диагональ квадрата ⇒

⇒ $\cos \angle HCN = \frac{HC}{NC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ($NC = 5$, $ND = 1$ т.к $DN : NC = 1:5$) ⇒

⇒ $HC = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ ⇒ $OH = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Р! пр/уг ∆ NMD : ∠ NDM = 45° (BD - диагональ квадрата)

⇒ $\cos \angle NDM = \frac{MD}{DN} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ⇒ $MD = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ⇒ $OM = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

5) В (ASC) KP ∥ SO

SO ⊥ (ABC), KP ∥ SO ⇒ KP ⊥ (ABC) ; PC ⊂ (ABC); KP ⊥ (ABC) ⇒ KP ⊥ PC ⇒

$\Rightarrow \triangle KPC$ - прямоугольный

P! $\triangle SOC$ и $\triangle KPC$ $KP \parallel SO \Rightarrow$ по теореме о пропорциональных отрезках $\cancel{\frac{CH}{CK}}$ $\cancel{\frac{HP}{KS}}$ $\Rightarrow \frac{CP}{OP} = \frac{CK}{KS} = \frac{5}{1} \Rightarrow OP = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\cancel{CH}$

$\Rightarrow CH = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

$CH = CP$, $OH = OP$, $C \in OC$, $O \in OC$, $H \in OC$, $P \in OC \Rightarrow$

$\Rightarrow$ точки H и P совпадают

По т. Пифагора из пр/уг $\triangle KPC$: $KP = \frac{5\sqrt{31}}{6}$

б) $V(-2\sqrt{2}; 0; 0)$; $N\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{5\sqrt{2}}{2}; 0\right)$; $K\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0; \frac{5\sqrt{31}}{6}\right)$

$B(0; 3\sqrt{2}; 0)$ $C(3\sqrt{2}; 0; 0)$

$\vec{BC}\{3\sqrt{2}; -3\sqrt{2}; 0\}$ $\vec{VN}\left\{\frac{5\sqrt{2}}{2}; -\frac{5\sqrt{2}}{2}; 0\right\}$

7)

$\cos\angle(BC; VN) = |\cos\angle(\vec{BC}; \vec{VN})| = \frac{|\vec{BC}\cdot\vec{VN}|}{|\vec{BC}|\cdot|\vec{VN}|} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle(BC; VN) = 0° \Rightarrow BC \parallel VN$ чтд

8) $Ax + By + Cz + D = 0$

$$\begin{cases} -2\sqrt{2}A + D = 0 \Rightarrow D = 2\sqrt{2}A \\ \frac{\sqrt{2}}{2}A - \frac{5\sqrt{2}}{2}B + D = 0 \Rightarrow A = B \\ \frac{\sqrt{2}}{2}A + \frac{5\sqrt{31}}{6}C + D = 0 \Rightarrow C = -\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{31}} \end{cases}$$

$Ax + Ay - \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{31}}Az + 2\sqrt{2}A = 0$ / $:A$

$x + y - \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{31}}z + 2\sqrt{2} = 0$ - уравнение пл-ти α

$\rho(C; \alpha) = \frac{|\cancel{}\cdot 3\sqrt{2} + 0 - 0 + 2\sqrt{2}|}{\sqrt{9\cdot 2}} = \frac{5\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{5}{3}$

Ответ: б) $\frac{5}{3}$

Комментарий.

Утверждение в пункте *а* доказано. В решении пункта *б* есть неточность в решении системы уравнений (выражение *C* через *A*), а при применении формулы расстояния от точки до плоскости неверно найден модуль вектора нормали (не относится к арифметической ошибке).

Оценка эксперта: 1 балл.

3. Критерии проверки и оценка решений задания 15

Задание № 15 — это неравенство: дробно-рациональное, логарифмическое или показательное.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением/ включением граничных точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

В первом случае выставления 1 балла допускаются только ошибки в строгости неравенства: «$<$» вместо «$\le$» или наоборот. **Если в ответ включено значение переменной, при котором одна из частей неравенства не имеет смысла, то следует выставлять оценку «0 баллов».**

Задача 15 (демонстрационный вариант ЕГЭ 2024 г.)

Решите неравенство $\log_{11}\left(8x^2+7\right)-\log_{11}\left(x^2+x+1\right)\geq\log_{11}\left(\frac{x}{x+5}+7\right)$.

Решение. Правая часть неравенства определена при $x<-5$ и $x>-\frac{35}{8}$.

Поскольку при любых значениях x выражение $8x^2+7$ принимает положительные значения, при $x<-5$ и $x>-\frac{35}{8}$ неравенство принимает вид:

$$\frac{8x^2+7}{x^2+x+1}\geq\frac{8x+35}{x+5};\ \frac{8x^3+40x^2+7x+35}{(x+5)\left(x^2+x+1\right)}\geq\frac{8x^3+43x^2+43x+35}{(x+5)\left(x^2+x+1\right)};$$

$$\frac{3x^2+36x}{(x+5)\left(x^2+x+1\right)}\leq 0;\ \frac{3x(x+12)}{(x+5)\left(x^2+x+1\right)}\leq 0,$$

откуда $x\leq-12$; $-5<x\leq 0$. Учитывая ограничения $x<-5$ и $x>-\frac{35}{8}$, получаем: $x\leq-12$; $-\frac{35}{8}<x\leq 0$.

Ответ: $(-\infty;-12]$; $\left(-\frac{35}{8};0\right]$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек -12 и/или 0, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задание 15.1

Решите неравенство $\log_8\left(x^3-3x^2+3x-1\right)\ge\log_2\left(x^2-1\right)-5$.

Решение.

Запишем исходное неравенство в виде:

$$\log_8(x-1)^3\ge\log_2\left(x^2-1\right)-5;\ \log_2(x-1)\ge\log_2(x-1)+\log_2(x+1)-5.$$

Левая часть неравенства определена при $x>1$.

При $x>1$ неравенство принимает вид:

$$\log_2(x+1)\le5;\ 0<x+1\le32,$$

откуда $-1<x\le31$. Учитывая ограничение $x>1$, получаем: $1<x\le31$.

Ответ: $(1;31]$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 31, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задание 15.2

Решите неравенство $\frac{4}{3^x-27}\ge\frac{1}{3^x-9}$.

Решение.

Пусть $t=3^x$, тогда неравенство примет вид:

$$\frac{4}{t-27}\ge\frac{1}{t-9};\ \frac{3t-9}{(t-9)(t-27)}\ge 0;\ \frac{3(t-3)}{(t-9)(t-27)}\ge 0,$$

откуда $3\le t<9$; $t>27$.

При $3\le t<9$ получим: $3\le 3^x<9$, откуда $1\le x<2$.

При $t>27$ получим: $3^x>27$, откуда $x>3$.

Решение исходного неравенства: $1\le x<2$; $x>3$.

Ответ: $[1;2)$; $(3;+\infty)$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 1, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание 15.3

Решите неравенство $2^x-6-\dfrac{9\cdot 2^x-37}{4^x-7\cdot 2^x+12}\le\dfrac{1}{2^x-4}$.

Решение.

Пусть $t=2^x$, тогда неравенство примет вид:

$$t-6-\frac{9t-37}{t^2-7t+12}\le\frac{1}{t-4};\ t-6-\frac{9t-37}{(t-3)(t-4)}-\frac{t-3}{(t-3)(t-4)}\le 0;$$

$$t-6-\frac{10}{t-3}\le 0,\text{ где } t\ne 4;\ \frac{(t-1)(t-8)}{t-3}\le 0,\text{ где } t\ne 4,$$

откуда $t\le 1$; $3<t<4$; $4<t\le 8$.

При $t\le 1$ получим: $2^x\le 1$, откуда $x\le 0$.

При $3<t<4$ получим: $3<2^x<4$, откуда $\log_2 3<x<2$.

При $4<t\le 8$ получим: $4<2^x\le 8$, откуда $2<x\le 3$.

Решение исходного неравенства:

$$x\le 0;\ \log_2 3<x<2;\ 2<x\le 3.$$

Ответ: $(-\infty;0]$; $(\log_2 3;2)$; $(2;3]$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек 0 и/или 3, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задание 15.4

Решите неравенство $\frac{\log_4(64x)}{\log_4 x-3}+\frac{\log_4 x-3}{\log_4(64x)}\geq\frac{\log_4 x^4+16}{\log_4^2 x-9}$.

Решение.

Пусть $t=\log_4 x$, тогда неравенство примет вид:

$$\frac{t+3}{t-3}+\frac{t-3}{t+3}\geq\frac{4t+16}{t^2-9};\ \frac{t^2+6t+9}{(t-3)(t+3)}+\frac{t^2-6t+9}{(t-3)(t+3)}-\frac{4t+16}{(t-3)(t+3)}\geq 0;$$

$$\frac{2t^2-4t+2}{(t-3)(t+3)}\geq 0;\ \frac{2(t-1)^2}{(t-3)(t+3)}\geq 0,\text{ откуда } t<-3;\ t=1;\ t>3.$$

При $t<-3$ получим: $\log_4 x<-3$, откуда $0<x<\frac{1}{64}$.

При $t=1$ получим: $\log_4 x=1$, откуда $x=4$.

При $t>3$ получим: $\log_4 x>3$, откуда $x>64$.

Решение исходного неравенства: $0<x<\frac{1}{64}$; $x=4$; $x>64$.

Ответ: $\left(0;\frac{1}{64}\right)$; 4; $(64;+\infty)$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 4, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задание 15.5

Решите неравенство $\log_3(5-5x) \ge \log_3\left(x^2-3x+2\right)-\log_3(x+4)$.

Решение.

Запишем исходное неравенство в виде:

$$\log_3(5(1-x)) \ge \log_3((2-x)(1-x))-\log_3(x+4);$$

$$\log_3 5+\log_3(1-x) \ge \log_3(2-x)+\log_3(1-x)-\log_3(x+4).$$

Неравенство определено при $-4<x<1$, поэтому при $-4<x<1$ неравенство принимает вид:

$$5 \ge \frac{2-x}{x+4};\ \frac{6x+18}{x+4} \ge 0,$$

откуда $x<-4$; $x \ge -3$. Учитывая ограничение $-4<x<1$, получаем: $-3 \le x<1$.

Ответ: $[-3;1)$.

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки -3, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Примеры оценивания решений задания 15

Пример 15.1.1

Решите неравенство $\log_8\left(x^3-3x^2+3x-1\right)\ge\log_2\left(x^2-1\right)-5.$

Ответ: $(1;31]$.

№15.

$\log_8(x^3-3x^2+3x-1)\geq\log_2(x^2-1)-5$

ограничения:

$\begin{cases}x^3-3x^2+3x-1>0\\ x^2-1>0\end{cases}$ => $\begin{cases}(x-1)(x^2-2x+1)>0 \Rightarrow (x-1)(x-1)^2>0\\ (x-1)(x+1)>0 \Rightarrow (x-1)(x+1)>0\end{cases}$

=> $\begin{cases}(x-1)^3>0\\ (x-1)(x+1)>0\end{cases}$ => $\begin{cases}\overset{-}{}\;1\;\overset{+}{}\;x\\ \overset{+}{}\;-1\;\overset{-}{}\;1\;\overset{+}{}\;x\end{cases}$ => $-1\quad 1\quad x$

$\Rightarrow x\in(1;+\infty)$

$\log_8(x-1)^3\geq\log_2(x^2-1)-\log_2 2^5$

$\log_{2^3}(x-1)^3\geq\log_2(x^2-1)-\log_2 32$

$\frac{3}{3}\log_2(x-1)\geq\log_2\left(\frac{(x^2-1)}{32}\right)$

$\log_2(x-1)\geq\log_2\left(\frac{x^2-1}{32}\right)$

$x-1\geq\frac{x^2-1}{32}\quad|\cdot 32$

$32x-32\geq x^2-1 \Rightarrow x^2-32x+31\leq0$

$\Rightarrow (x-31)(x-1)\leq0$

$\overset{+}{}\;1\;\overset{-}{}\;31\;\overset{+}{}\;x$

учитывая ограничение: $x\in(1;31]$

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 15.1.2

Решите неравенство $\log_8\left(x^3-3x^2+3x-1\right)\geq \log_2\left(x^2-1\right)-5.$

Ответ: $(1;31]$.

№15

$\log_8(x^3-3x^2+3x-1) \geqslant \log_2(x^2-1)-5$

$\log_{2^3}(x-1)^3-\log_2(x^2-1)+5\geqslant 0$

$\frac{1}{3}\log_2(x-1)^3-\log_2(x^2-1)+5\geqslant 0$

$\log_2\sqrt[3]{(x-1)^3}-\log_2(x^2-1)+\log_2 32\geqslant 0$

$\log_2(x-1)-\log_2(x^2-1)+\log_2 32\geqslant 0$

$\log_2\frac{(x-1)\cdot 32}{(x^2-1)}\geqslant 0$

используем метод рационализации:

$(2-1)\left(\frac{(x-1)\cdot 32}{x^2-1}-1\right)\geqslant 0$

$1\cdot\frac{32x-32-x^2+1}{x^2-1}\geqslant 0 \;|\cdot(-1)$

$\frac{x^2-32x+31}{(x-1)(x+1)}\leqslant 0$

решим отдельно числитель:

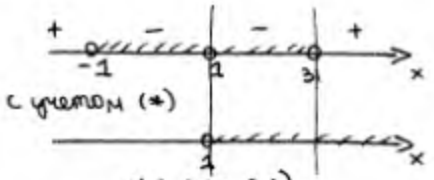
$x^2-32x+31=0$

по т. Виета:

$\begin{cases}x_1\cdot x_2=31\\ x_1+x_2=32\end{cases}$

отсюда: $x_1=31$, $x_2=1$

$\frac{(x-31)(x-1)}{(x-1)(x+1)}\leqslant 0$



$x\in(1;31)$

Ответ: $x\in(1;31)$

$*\begin{cases}① & x^2-1>0\\ ② & x^3-3x^2+3x-1>0\end{cases}$

① $x^2-1>0$

$(x-1)(x+1)>0$

$x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$

② $x^3-3x^2+3x-1>0$

$$\begin{array}{l|l} x^3-3x^2+3x-1 & x-1\\ \cline{2-2} x^3-x^2 & x^2-2x+1\\ \hline -2x^2+3x & \\ -2x^2+2x & \\ \hline x-1 & \\ x-1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$(x-1)(x^2-2x+1)>0$

$(x-1)(x-1)^2>0$

$(x-1)^3>0$

$x\in(1;+\infty)$

Отсюда: $*\ x\in(1;+\infty)$

объединив оба неравенства получаем:

Комментарий.

Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 31.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 15.1.3

Решите неравенство $\log_8\left(x^3-3x^2+3x-1\right)\geq\log_2\left(x^2-1\right)-5.$

Ответ: $\left(1;31\right]$.

№15 $\log_8(x^3-3x^2+3x-1)\geqslant\log_2(x^2-1)-5$

$\frac{1}{3}\log_2(x^3-3x^2+3x-1)\geqslant\log_2\left(\frac{x^2-1}{32}\right)$

$\log_2(x^3-3x^2+3x-1)\geqslant\log_2\left(\left(\frac{x^2-1}{32}\right)^3\right)$

Ограничение: $\left(\frac{x^2-1}{32}\right)^3>0$; $(x-1)^3(x+1)^3>0$; $x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$

Тогда $x^3-3x^2+3x-1>0$ при $\left(\frac{x^2-1}{32}\right)^3>0$.

$\log_2 t$ – монотонно возрастающая функция $\Rightarrow$

$x^3-3x^2+3x-1\geqslant\left(\frac{x^2-1}{32}\right)^3$; $(x-1)^3\geqslant\left(\frac{x^2-1}{32}\right)^3$,

т.к. правая и левая части положительны $\Rightarrow$

$x-1\geqslant\frac{x^2-1}{32}$; $32x-32\geqslant x^2-1$; $x^2-32x+31\leq0$

$(x-31)(x-1)\leq0$ $x\in[1;31]$

С учетом ограничений:

$x\in(1;31]$ Ответ: $x\in(1;31]$

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 15.2.1

Решите неравенство $\dfrac{4}{3^x-27}\geq\dfrac{1}{3^x-9}$.

Ответ: $\left[1;\,2\right)$; $\left(3;\,+\infty\right)$.

$$\frac{4}{3^x-27}\geqslant\frac{1}{3^x-9}\qquad \begin{cases}3^x-27\neq 0\\ 3^x-9\neq 0\end{cases}\qquad \begin{cases}x\neq 3\\ x\neq 2\end{cases}$$

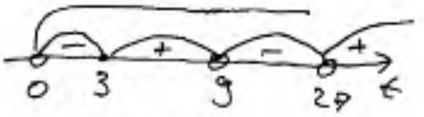
$3^x=t$, $t>0$

$$\frac{4}{t-27}\geqslant\frac{1}{t-9}\qquad \begin{cases}t\neq 27\\ t\neq 9\end{cases}$$

$$\frac{4}{t-27}-\frac{1}{t-9}\geqslant 0$$

$$\frac{4t-36-t+27}{(t-27)(t-9)}\geqslant 0$$

$$\frac{3(t-3)}{(t-9)(t-27)}\geqslant 0$$



$3\leq t<9$ $\qquad$ $27<t$

$3\leqslant 3^x<9$ $\qquad$ $27<3^x$

$1\leqslant x<2$ $\quad$ $3>1\Rightarrow$ ф-я 3^x возр-т $\qquad$ $x>3$ $\quad$ $3>1\Rightarrow$ ф-я 3^x возр-т

$$x\in[1;2)\cup(3;+\infty)$$

Ответ: $x\in[1;2)\cup(3;+\infty)$

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 15.2.2

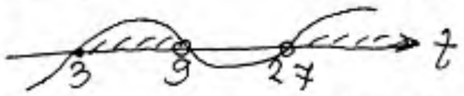
Решите неравенство $\frac{4}{3^x-27} \geq \frac{1}{3^x-9}$.

Ответ: $[1;2)$; $(3;+\infty)$.

$\frac{4}{3^x-27} \geq \frac{1}{3^x-9}$ Пусть $3^x = t$

$$\begin{cases} \frac{4}{t-27} - \frac{1}{t-9} \geq 0 \\ t-27 \neq 0 \\ t-9 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4t-36-t+27}{(t-27)(t-9)} \geq 0 \\ t \neq 27 \\ t \neq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3t-9}{(t-27)(t-9)} \geq 0 \\ t \neq 27 \\ t \neq 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t-3}{(t-27)(t-9)} \geq 0 \\ t \neq 27 \\ t \neq 9 \end{cases}$$



$$\left[\begin{array}{l} t>27 \\ \begin{cases} t \geq 3 \\ t<9 \end{cases} \end{array}\right. \text{ в.к. 3. } \left[\begin{array}{l} 3^x>3^3 \\ \begin{cases} 3^x \geq 3^1 \\ 3^x<3^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>3 \\ \begin{cases} x \geq 1 \\ x<2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in [1;2) \cup (3;+\infty)$ $1 \leq x < 2$ и $x > 3$

Комментарий.

В решении нарушена равносильность последних двух совокупностей.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 15.2.3

Решите неравенство $\frac{4}{3^x-27} \geq \frac{1}{3^x-9}$.

Ответ: $[1;2)$; $(3;+\infty)$.

$$\frac{4}{3^x-27} \geq \frac{1}{3^x-9}$$

Неравенство определено, если $x \neq 3$ и $x \neq 2$

Пусть $3^x = t$, запишем:

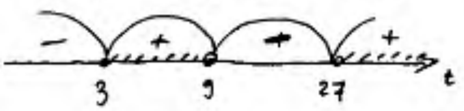
$$\frac{4}{t-27} \geq \frac{1}{t-9}$$

$$\frac{4}{t-27} - \frac{1}{t-9} \geq 0$$

$$\frac{4t-36-t+27}{(t-27)(t-9)} \geq 0$$

$$\frac{3t-9}{(t-27)(t-9)} \geq 0$$

$t=3$ $\quad$ $t \neq 27$ $\quad$ $t \neq 9$



$3 \leq t \leq 9$ $\qquad$ $t \geq 27$

$3 \leq 3^x \leq 9$ $\qquad$ $3^x \geq 27$

$1 \leq x \leq 2$ $\qquad$ $x \geq 3$

Так как $x \neq 3$ и $x \neq 2$, получим: $x \in [1;2) \cup (3;+\infty)$.

Ответ: $[1;2) \cup (3;+\infty)$.

Комментарий.

Неверно решено рациональное неравенство относительно новой переменной.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 15.3.1

Решите неравенство $2^x - 6 - \dfrac{9\cdot 2^x - 37}{4^x - 7\cdot 2^x + 12} \le \dfrac{1}{2^x - 4}$.

Ответ: $(-\infty; 0]$; $(\log_2 3; 2)$; $(2; 3]$.

$2^x - 6 - \dfrac{9\cdot 2^x - 37}{4^x - 7\cdot 2^x + 12} \le \dfrac{1}{2^x - 4}$;

ОДЗ: $x \ne 2$
$x \ne \log_2 3$
$4^x - 7\cdot 2^x + 12 \ne 0$
$(2^x - 3)(2^x - 4) \ne 0$
$t > 0$;

$2^x = t$;

$t - 6 - \dfrac{9t - 37}{t^2 - 7t + 12} \le \dfrac{1}{t - 4}$;

$t - 6 - \dfrac{9t - 37}{(t-3)(t-4)} \le \dfrac{1}{t - 4}$;

$t - 6 - \dfrac{9t - 37 + t - 3}{(t-3)(t-4)} \le 0$;

$t - 6 - \dfrac{10(t-4)}{(t-3)(t-4)} \le 0$;

$\dfrac{(t-4)((t-6)(t-3) - 10)}{(t-3)(t-4)} \le 0$;

$\dfrac{(t-4)(t^2 - 9t + 8)}{(t-3)(t-4)} \le 0$;

$\dfrac{(t-4)(t-1)(t-8)}{(t-3)(t-4)} \le 0$

$0 < 2^x \le 1$ $\quad$ $3 < 2^x < 4$ $\quad$ $4 < 2^x \le 8$

$\underline{x \le 0}$; $\quad$ $\begin{cases} x > \log_2 3; \\ x < 2; \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x > 2; \\ x \le 3; \end{cases}$

Ответ: $(-\infty; 0] \cup (\log_2 3; 2) \cup (2; 3]$.

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 15.3.2

Решите неравенство $2^x - 6 - \dfrac{9\cdot 2^x - 37}{4^x - 7\cdot 2^x + 12} \le \dfrac{1}{2^x - 4}$.

Ответ: $(-\infty; 0]$; $(\log_2 3; 2)$; $(2; 3]$.

$$2^x - 6 - \frac{9\cdot 2^x - 37}{4^x - 7\cdot 2^x + 12} \le \frac{1}{2^x - 4}$$

Пусть $2^x = t$ Тогда

$$t - 6 - \frac{9t - 37}{(t-4)(t-3)} \le \frac{1}{t-4}$$

ОДЗ
$\begin{cases} t \ne 4 \\ t \ne 3 \end{cases}$ $\begin{cases} 2^x \ne 4 \\ 2^x \ne 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x \ne 2 \\ x \ne \log_2 3 \end{cases}$

$$\frac{t^3 - 13t^2 + 54t - 72 - 9t + 37 - t + 3}{(t-4)(t-3)} \le 0$$

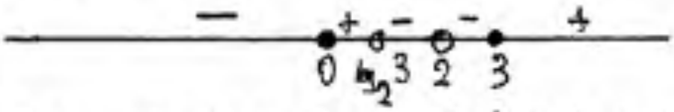
$$\frac{t^3 - 13t^2 + 44t - 32}{(t-4)(t-3)} \le 0$$

$$\frac{\cancel{(t-4)}(t^2 - 9t + 8)}{\cancel{(t-4)}(t-3)} \le 0$$

$$\frac{(t-1)(t-8)}{t-3} \le 0$$

Обратно

$$\frac{(2^x-1)(2^x-8)}{2^x-3} \le 0$$



Ответ: $(-\infty; 0] \vee (\log_2 3; 2) \vee (2; 3)$

Комментарий.

В решении содержится запись «ОДЗ», которая может трактоваться по-разному. Получен неверный ответ, но он отличается от верного только исключением точки 3.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 15.3.3

Решите неравенство $2^x-6-\dfrac{9\cdot 2^x-37}{4^x-7\cdot 2^x+12}\le\dfrac{1}{2^x-4}$.

Ответ: $(-\infty;0]$; $(\log_2 3;2)$; $(2;3]$.

$$2^x-6-\frac{9\cdot 2^x-37}{4^x-7\cdot 2^x+12}\le\frac{1}{2^x-4}$$

Пусть $2^x=t$, то $t-6-\dfrac{9t-37}{t^2-7t+12}-\dfrac{1}{t-4}\le 0$

$t^2-7t+12=0$ $\quad (t-3)(t-4)$

$D=49-4\cdot 12=1$ $\quad t-6-\dfrac{9t-37}{(t-3)(t-4)}-\dfrac{1}{t-4}\le 0$ $\quad t-3$

$t_1=\dfrac{7-1}{2}=3$

$t_2=\dfrac{7+1}{2}=4$ $\quad \dfrac{(t^2-7t+12)(t-6)-(9t-37)-(t-3)}{(t-3)(t-4)}\le 0$

$(t-3)(t-4)=t^2-7t+12$

$(t^3-7t^2+12t-6t^2+42t-72)-(9t-37)-(t-3)\le 0$

$t^3-13t^2+54t-72-9t+37-t+3\le 0$

$t^3-13t^2+44t-32\le 0$

Схема Горнера: Пусть $t_1=1$, то

$1-13+44-32=45-45=0$ – подходит

	1	−13	44	−32
1	1	−12	32	0

$(t-1)(t^2-12t+32)\le 0$

$t^2-12t+32=0$

$D=144-4\cdot 32=144-128=16$

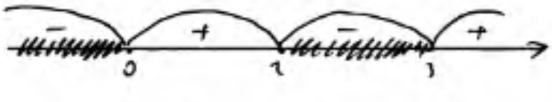
$t_2=\dfrac{12-4}{2}=4$ $\quad t_3=\dfrac{12+4}{2}=8$

$t_1=1$ $\quad t_2=4$ $\quad t_3=8$

$2^x=1$ $\quad 2^x=4$ $\quad 2^x=8$

$x_1=0$ $\quad x_2=2$ $\quad x_3=3$

$x\in(-\infty;0]\cup[2;3]$



Ответ: $(-\infty;0]\cup[2;3]$

Комментарий.

В решении неравенства допущена ошибка – неравносильный переход.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 15.4.1

Решите неравенство $\dfrac{\log_4(64x)}{\log_4 x-3}+\dfrac{\log_4 x-3}{\log_4(64x)}\ge\dfrac{\log_4 x^4+16}{\log_4^2 x-9}$.

Ответ: $\left(0;\dfrac{1}{64}\right)$; 4; $(64;+\infty)$.

$$\frac{\log_4(64x)}{\log_4 x-3}+\frac{\log_4 x-3}{\log_4(64x)}\geq\frac{\log_4 x^4+16}{\log_4^2 x-9}$$

ОДЗ $\begin{cases} x>0 \\ \log_4 x-3\neq 0 \\ \log_4(64x)\neq 0 \\ \log_4^2 x-9\neq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x>0 \\ \log_4 x\neq 3 \\ 64x\neq 1 \\ (\log_4 x-3)(\log_4 x+3)\neq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x>0 \\ x\neq 64 \\ x\neq \frac{1}{64} \\ \log_4 x\neq -3 \end{cases}$

$\begin{cases} x>0 \\ x\neq 64 \\ x\neq \frac{1}{64} \end{cases}$

$x\in\left(0;\frac{1}{64}\right)\cup\left(\frac{1}{64};64\right)\cup(64;+\infty)$

$$\frac{\log_4 x+3}{\log_4 x-3}+\frac{\log_4 x-3}{\log_4 x+3}\geq\frac{4\log_4 x+16}{(\log_4 x-3)(\log_4 x+3)}$$

$t=\log_4 x \qquad t\neq\pm 3$

$$\frac{t+3}{t-3}+\frac{t-3}{t+3}\geq\frac{4t+16}{(t-3)(t+3)}$$

$$\frac{(t+3)^2+(t-3)^2-4t-16}{(t-3)(t+3)}\geq 0$$

$$\frac{t^2+6t+9+t^2-6t+9-4t-16}{(t-3)(t+3)}\geq 0$$

$\dfrac{2t^2-4t+2}{(t-3)(t+3)}\geq 0 \qquad \dfrac{t^2-2t+1}{(t-3)(t+3)}\geq 0 \qquad \dfrac{(t-1)^2}{(t+3)(t-3)}\geq 0$ $\quad$ + -3 − 1 − 3 + t

$t\in(-\infty;-3)\cup\{1\}\cup(3;+\infty)\Rightarrow\log_4 x\in(-\infty;-3)\cup\{1\}\cup(3;+\infty)\Rightarrow$

$\Rightarrow x\in\left(0;\frac{1}{64}\right)\cup\{4\}\cup(64;+\infty)$

Ответ: $x\in\left(0;\frac{1}{64}\right)\cup\{4\}\cup(64;+\infty)$

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 15.4.2

Решите неравенство $\dfrac{\log_4(64x)}{\log_4 x-3}+\dfrac{\log_4 x-3}{\log_4(64x)}\ge\dfrac{\log_4 x^4+16}{\log_4^2 x-9}$.

Ответ: $\left(0;\dfrac{1}{64}\right)$; 4; $(64;+\infty)$.

$$\frac{\log_4(64x)}{\log_4 x-3}+\frac{\log_4 x-3}{\log_4(64x)}\geqslant\frac{\log_4 x^4-16}{\log_4^2 x-9}$$

ОДЗ. $x>0$, $x\in(0;+\infty)$

$$\frac{\log_4 64+\log_4 x}{\log_4 x-3}+\frac{\log_4 x-3}{\log_4 64+\log_4 x}-\frac{4\log_4 x-16}{\log_4^2 x-9}\geqslant 0$$

$$\frac{3+\log_4 x}{\log_4 x-3}+\frac{\log_4 x-3}{3+\log_4 x}-\frac{4\log_4 x-16}{\log_4^2 x-9}\geqslant 0$$

Пусть $\log_4 x=t$, тогда

$$\frac{3+t}{t-3}+\frac{t-3}{3+t}-\frac{4t-16}{t^2-9}\geqslant 0$$

$$\frac{(t+3)(t+3)+(t-3)(t-3)}{(t-3)(t+3)}-\frac{4t+16}{(t-3)(t+3)}\geqslant 0$$

$$\frac{t^2+3t+3t+9+t^2-3t-3t+9-4t-16}{(t-3)(t+3)}\geqslant 0$$

$$\frac{2t^2-4t+2}{(t-3)(t+3)}\geqslant 0$$

$$\frac{2(t-1)^2}{(t-3)(t+3)}\geqslant 0$$

$\log_4 x<-3$ $\qquad$ $\log_4 x=1$ $\qquad$ $\log_4 x>3$

$x<\frac{1}{64}$ $\qquad$ $x=4$ $\qquad$ $x>64$

Ответ: $x\in\left(-\infty;\frac{1}{64}\right)\cup(4)\cup(64;+\infty)$

Комментарий.

При выполнении задания допущена ошибка в решении простейшего логарифмического неравенства. В решении также содержится ошибочное утверждение, связанное с ОДЗ.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 15.5.1

Решите неравенство $\log_3(5-5x) \geq \log_3\left(x^2-3x+2\right) - \log_3(x+4)$.

Ответ: $[-3;1)$.

$$\log_3(5-5x) \geq \log_3(x^2-3x+2) - \log_3(x+4)$$

ОДЗ:

$5(1-x)>0$

$x^2-3x+2>0 \Rightarrow (x-2)(x-1)>0$

$x>-4$

$$\log_3(5-5x) \geq \log_3 \frac{x^2-3x+2}{x+4}$$

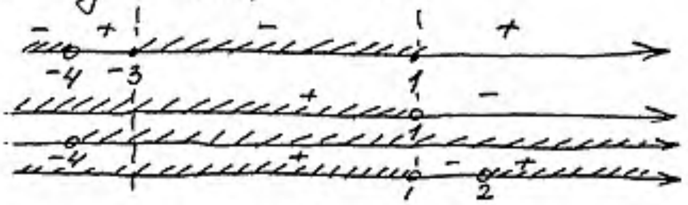
$3>1 \Rightarrow$ функция монотонно возрастает $\Rightarrow$

$$\Rightarrow 5-5x \geq \frac{x^2-3x+2}{x+4} \Rightarrow \frac{(5-5x)(x+4)-x^2+3x-2}{x+4} \geq 0$$

$$\frac{5x+20-5x^2-20x-x^2+3x-2}{x+4} \geq 0$$

$$\frac{-6x^2-12x+18}{x+4} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2+2x-3}{x+4} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x+3)(x-1)}{x+4} \leq 0$$

~~метод интервалов~~



$\Rightarrow x \in [-3;1)$

Ответ: $[-3;1)$

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 15.5.2

Решите неравенство $\log_3(5-5x) \geq \log_3\left(x^2-3x+2\right)-\log_3(x+4)$.

Ответ: $[-3;1)$.

$\log_3 (5-5x) \geqslant \log_3 (x^2-3x+2) - \log_3 (x+4)$

ОДЗ. $\begin{cases} 5-5x>0 \\ x^2-3x+2>0 \\ x+4>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1 \\ x<1;\ x>2 \\ x>-4. \end{cases}$

$\Rightarrow x \in (-4;1);\ (2;+\infty)$

$\log_3 (5-5x) + \log_3 (x+4) \geqslant \log_3 (x^2-3x+2)$

$\log_3 (5-5x)\cdot(x+4) \geqslant \log_3 (x^2-3x+2)$

$\log_3$ – монотонно возрастающая функция $\Rightarrow$ знак неравенства не меняем.

$(5-5x)\cdot(x+4) \geqslant x^2-3x+2$

$-6x^2-12x+18 \geqslant 0 \quad |:-6$

$x^2+2x-3 \leqslant 0 \Rightarrow (x-1)(x+3) \leqslant 0$

$\begin{cases} x \in [-3;1]. \\ x \in (-4;1);\ (2;+\infty) \end{cases} \Rightarrow x \in [-3;1)$

Ответ; $[-3;1)$

Комментарий.

Система неравенств в ОДЗ решена неверно (не вычислительная ошибка). Также неверно решено логарифмическое неравенство.

Оценка эксперта: 0 баллов.

4. Критерии проверки и оценка решений задания 16

Задание № 16 — это текстовая задача с экономическим содержанием.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Подробнее: 1 балл можно выставлять в тех случаях, когда сюжетное условие задачи верно сведено к решению математической (арифметической, алгебраической, функциональной, геометрической) задачи, но именно к решению, а не к отдельному равенству, набору уравнений, уравнению, задающему функцию, и т.п. Предъявленный текст должен включать описание того, как построена модель.

Следует подчеркнуть, что один и тот же сюжет может быть успешно сведён к различным математическим моделям и доведён до верного ответа. По этой причине в критериях оценивания нет жёсткого упоминания какой-либо конкретной (арифметической, алгебраической, геометрической, функциональной) модели.

Задача 16 (демонстрационный вариант ЕГЭ 2024 г.)

В июле 2025 года планируется взять кредит на десять лет в размере 800 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг будет возрастать на r % по сравнению с концом предыдущего года (r — целое число);

— с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;

— в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

— в июле 2030 года долг должен составить 200 тыс. рублей;

— в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

— к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 1480 тыс. рублей. Найдите r.

Решение. По условию долг (в тыс. рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться следующим образом:

$$800;\ 680;\ 560;\ 440;\ 320;\ 200;\ 160;\ 120;\ 80;\ 40;\ 0.$$

Пусть $k = 1 + \frac{r}{100}$. Тогда последовательность размеров долга (в тыс. рублей) по состоянию на январь такова:

$$800k;\ 680k;\ 560k;\ 440k;\ 320k;\ 200k;\ 160k;\ 120k;\ 80k;\ 40k.$$

Следовательно, платежи (в тыс. рублей) должны быть следующими:

$$800k - 680;\ 680k - 560;\ 560k - 440;\ 440k - 320;\ 320k - 200;$$
$$200k - 160;\ 160k - 120;\ 120k - 80;\ 80k - 40;\ 40k.$$

Значит, сумма всех платежей (в тыс. рублей) будет составлять:

$$5(560k - 440) + 5(120k - 80) = 3400k - 2600.$$

Получаем: $3400k - 2600 = 1480,$ откуда $k = 1{,}2$ и $r = 20.$

Ответ: 20.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задание 16.1

В июле 2025 года планируется взять кредит на десять лет в размере 1300 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг будет возрастать на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;
— в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
— в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
— к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.
Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 2580 тыс. рублей. Сколько рублей составит долг в июле 2030 года?

Решение.
Пусть долг в июле 2030 года составит B тыс. рублей.
По условию долг (в тыс. рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться следующим образом:

$$1300;\ 1040+0{,}2B;\ 780+0{,}4B;\ 520+0{,}6B;\ 260+0{,}8B;$$
$$B;\ 0{,}8B;\ 0{,}6B;\ 0{,}4B;\ 0{,}2B;\ 0.$$

В январе каждого года долг возрастает на 20 %, значит, последовательность размеров долга (в тыс. рублей) по состоянию на январь такова:

$$1560;\ 1248+0{,}24B;\ 936+0{,}48B;\ 624+0{,}72B;\ 312+0{,}96B;$$
$$1{,}2B;\ 0{,}96B;\ 0{,}72B;\ 0{,}48B;\ 0{,}24B.$$

Следовательно, платежи (в тыс. рублей) должны быть следующими:

$$520-0{,}2B;\ 468-0{,}16B;\ 416-0{,}12B;\ 364-0{,}08B;\ 312-0{,}04B;$$
$$0{,}4B;\ 0{,}36B;\ 0{,}32B;\ 0{,}28B;\ 0{,}24B.$$

Значит, сумма всех платежей (в тыс. рублей) будет составлять:

$$5\left(416-0{,}12B\right)+5\cdot 0{,}32B=2080+B.$$

Получаем: $2080+B=2580$, откуда $B=500$.
Долг в июле 2030 года составит 500 тыс. рублей.

Ответ: 500 тыс. рублей.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задание 16.2

В июле 2026 года планируется взять кредит на три года в размере 800 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг будет возрастать на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
— платежи в 2027 и 2028 годах должны быть равными;
— к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.
Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 1254,4 тыс. рублей. Сколько рублей составит платёж 2027 года?

Решение.
Пусть платежи в 2027 и 2028 годах составят по x тыс. рублей.
В январе 2027 года долг (в тыс. рублей) будет равен 960, а в июле равен $960-x$. В январе 2028 года долг будет равен $1152-1,2x$, а в июле равен $1152-2,2x$. В январе 2029 года долг будет равен $1382,4-2,64x$. По условию, к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью, значит, платёж в 2029 году должен быть равен $(1382,4-2,64x)$ тыс. рублей, а сумма всех платежей будет составлять $(1382,4-0,64x)$ тыс. рублей. Получаем:

$$1382,4-0,64x=1254,4;\ 0,64x=128,$$

откуда $x=200$.
Платёж в 2027 году должен быть равен 200 тыс. рублей.

Ответ: 200 тыс. рублей.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задание 16.3

15 января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн руб. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r – **целое** число;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн руб.)	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0

Найдите наименьшее значение r, при котором общая сумма выплат будет больше 1,2 млн руб.

Решение.

По условию, долг перед банком (в млн руб.) на 15-е число каждого месяца должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$1;\ 0{,}9;\ 0{,}8;\ 0{,}7;\ 0{,}6;\ 0{,}5;\ 0.$$

Пусть $k = 1 + \frac{r}{100}$, тогда долг на 1-е число каждого месяца равен:

$$k;\ 0{,}9k;\ 0{,}8k;\ 0{,}7k;\ 0{,}6k;\ 0{,}5k.$$

Следовательно, выплаты со 2-го по 14-е число каждого месяца составляют:

$$k-0{,}9;\ 0{,}9k-0{,}8;\ 0{,}8k-0{,}7;\ 0{,}7k-0{,}6;\ 0{,}6k-0{,}5;\ 0{,}5k.$$

Общая сумма выплат составляет:

$$k(1+0{,}9+0{,}8+0{,}7+0{,}6+0{,}5)-(0{,}9+0{,}8+0{,}7+0{,}6+0{,}5)=$$
$$=(k-1)(1+0{,}9+0{,}8+0{,}7+0{,}6+0{,}5)+1=4{,}5(k-1)+1.$$

По условию, общая сумма выплат будет больше 1,2 млн руб., значит,

$$4{,}5(k-1)+1>1{,}2;\ 4{,}5\cdot\frac{r}{100}+1>1{,}2;\ r>4\frac{4}{9}.$$

Наименьшее целое решение этого неравенства – число 5. Значит, искомое число процентов – 5.

Ответ: 5.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задание 16.4

15 января планируется взять кредит в банке на 39 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 20% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.
(Считайте, что округления при вычислении платежей не производятся.)

Решение.
Пусть сумма кредита равна S. По условию, долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$S,\ \frac{38S}{39},\ \ldots,\ \frac{2S}{39},\ \frac{S}{39},\ 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$. Пусть $k=1+\frac{r}{100}$, тогда последовательность размеров долга на 1-е число каждого месяца такова:

$$kS,\ \frac{38kS}{39},\ \ldots,\ \frac{2kS}{39},\ \frac{kS}{39}.$$

Следовательно, выплаты должны быть следующими:

$$(k-1)S+\frac{S}{39},\ \frac{38(k-1)S+S}{39},\ \ldots,\ \frac{2(k-1)S+S}{39},\ \frac{(k-1)S+S}{39}.$$

Всего следует выплатить $S+S(k-1)\left(1+\frac{38}{39}+\ldots+\frac{2}{39}+\frac{1}{39}\right)=S\left(1+20(k-1)\right)$.

Общая сумма выплат на 20% больше суммы, взятой в кредит, поэтому

$$20(k-1)=0,2;\ k=1,01;\ r=1.$$

Ответ: 1.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Примеры оценивания решений задания 16

Пример 16.1.1

В июле 2025 года планируется взять кредит на десять лет в размере 1300 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг будет возрастать на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;

— в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

— в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

— к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 2580 тыс. рублей. Сколько рублей составит долг в июле 2030 года?

Ответ: 500 тыс. рублей.

N 16

S = 1300 тыс.руб - сумма кредита

r - процент банка

r = 20%

n - срок кредитования

n = 10

1) составим схему выплат:

год	долг до начисл. %	долг после начисл. %	выплата	остаток
2026	S	$1,2S$	$0,2S+x$	$S-x$
2027	$S-x$	$1,2(S-x)$	$0,2(S-x)+x$	$S-2x$
2028	$S-2x$	$1,2(S-2x)$	$0,2(S-2x)+x$	$S-3x$
2029	$S-3x$	$1,2(S-3x)$	$0,2(S-3x)+x$	$S-4x$
2030	$S-4x$	$1,2(S-4x)$	$0,2(S-4x)+x$	$S-5x$
2031	$S-5x$	$1,2(S-5x)$	$0,2(S-5x)+y$	$S-5x-y$
2032	$S-5x-y$	$1,2(S-5x-y)$	$0,2(S-5x-y)+y$	$S-5x-2y$
2033	$S-5x-2y$	$1,2(S-5x-2y)$	$0,2(S-5x-2y)+y$	$S-5x-3y$
2034	$S-5x-3y$	$1,2(S-5x-3y)$	$0,2(S-5x-3y)+y$	$S-5x-4y$
2035	$S-5x-4y$	$1,2(S-5x-4y)$	$0,2(S-5x-4y)+y$	$S-5x-5y$

2) т.к. в июле 2035 года кредит был полностью погашен, то долг на конец 2035 года составлял 0 рублей, значит:

$$S-5x-5y=0$$

$$y=\frac{S-5x}{5}=\frac{S}{5}-x=\frac{1300}{5}-x=260-x$$

3) сумма выплат за 2026 - 2030 года: $0{,}2S+x+0{,}2(S-x)+x+0{,}2(S-2x)+x+0{,}2(S-3x)+x+0{,}2(S-4x)+x=$

$$=S+3x$$

сумма выплат за 2031 - 2035 года:

$$0{,}2(S-5x)+y+0{,}2(S-5x-y)+y+0{,}2(S-5x-2y)+y+0{,}2(S-5x-3y)+y+0{,}2(S-5x-4y)+y=$$

$$=S-5x+3y$$

4) общая сумма выплат по условию равняется 2580 тыс. рублей, значит:

$$S+3x+S-5x+3y=2580$$

$$2S-2x+3y=2580$$

$$2S-2x+3(260-x)=2580$$

$$2S-2x+780-3x=2580$$

$$x=\frac{2S+780-2580}{5}=\frac{2\cdot1300+780-2580}{5}=160.$$

5) т.к. с 2026 г по 2030 г долг равномерно уменьшался на x, то долг в июле 2030 г будет составлять:

$$S-5x=1300-5\cdot160=500 \text{ тыс. руб.}$$

Ответ: 500 тыс. рублей.

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 16.1.2

В июле 2025 года планируется взять кредит на десять лет в размере 1300 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг будет возрастать на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;

— в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

— в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

— к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 2580 тыс. рублей. Сколько рублей составит долг в июле 2030 года?

Ответ: 500 тыс. рублей.

16.

Пусть ~~A руб~~ $A = 1\,300\,000$ руб – сумма долга (общая)

Для удобства будем нумеровать года, начиная с 1.

Пусть в течение первых 5 лет долг каждый год уменьшается на X рублей. Тогда к концу 5-го года он составит $(A - 5x)$ руб. Тогда в течение вторых 5 лет он каждый год будет уменьшаться на $\frac{1}{5}(A - 5x)$ и в конце 10-го года станет равным 0.

Построим таблицу:

Год	Долг на начало года, руб	Процентные увеличения, руб	Выплата, руб	Долг на конец года, руб
1	A	$0{,}2A$	$0{,}2A + X$	$A - X$
2	$A - X$	$0{,}2A - 0{,}2x$	$0{,}2A - 0{,}2x + x$	$A - 2x$
3	$A - 2x$	$0{,}2A - 0{,}2 \cdot 2x$	$0{,}2A - 0{,}2 \cdot 2x + x$	$A - 3x$
4	$A - 3x$	$0{,}2A - 0{,}2 \cdot 3x$	$0{,}2A - 0{,}2 \cdot 3x + x$	$A - 4x$
5	$A - 4x$	$0{,}2A - 0{,}2 \cdot 4x$	$0{,}2A - 0{,}2 \cdot 4x + x$	$A - 5x$
6	$A - 5x$	$0{,}2A - 0{,}2 \cdot 5x$	$0{,}2A - 0{,}2 \cdot 5x + 0{,}2(A - 5x)$	$0{,}8(A - 5x)$
7	$0{,}8(A - 5x)$	$0{,}2 \cdot 0{,}8(A - 5x)$	$0{,}2 \cdot 0{,}8(A - 5x) + 0{,}2(A - 5x)$	$0{,}6(A - 5x)$
8	$0{,}6(A - 5x)$	$0{,}2 \cdot 0{,}6(A - 5x)$	$0{,}2 \cdot 0{,}6(A - 5x) + 0{,}2(A - 5x)$	$0{,}4(A - 5x)$
9	$0{,}4(A - 5x)$	$0{,}2 \cdot 0{,}4(A - 5x)$	$0{,}2 \cdot 0{,}4(A - 5x) + 0{,}2(A - 5x)$	$0{,}2(A - 5x)$
10	$0{,}2(A - 5x)$	$0{,}2 \cdot 0{,}2(A - 5x)$	$0{,}2 \cdot 0{,}2(A - 5x) + 0{,}2(A - 5x)$	0

Реш. Выплаты за первые 5 лет образуют арифм. прогрессию с 1-м членом $(0{,}2A+x)$ и шагом $(-0{,}2x)$. Сумма выплат за годы 1–5:

$$S_{1-5}=\frac{(0{,}2A+x)+(0{,}2A-0{,}2\cdot 4x+x)}{2}\cdot 5=\frac{0{,}4A+1{,}2x}{2}\cdot 5=$$
$$=(0{,}2A+0{,}6x)\cdot 5=A+3x.$$

Выплаты за вторые 5 лет тоже образуют арифм. прогр. с 1-м членом $(0{,}2A-0{,}2\cdot 5x+0{,}2(A-5x))$ и шагом $\cancel{-0{,}2(A-5x)}$ $-0{,}2(0{,}2A-x)$. Сумма выплат за годы 6–10:

$$S_{6-10}=\frac{(0{,}2A-0{,}2\cdot 5x+0{,}2(A-5x))+(0{,}04(A-5x)+0{,}2(A-5x))}{2}\cdot 5=$$
$$=\frac{(0{,}2A-x+0{,}2A-x)+(0{,}04A-0{,}2x+0{,}2A-x)}{2}\cdot 5=\frac{(0{,}4A-2x)+(0{,}24A-1{,}2x)}{2}\cdot 5$$
$$=\frac{0{,}64A-3{,}2x}{2}\cdot 5=(0{,}32A-1{,}6x)\cdot 5=1{,}6A-8x.$$

Общая сумма выплат: $S=S_{1-5}+S_{6-10}=A+3x+1{,}6A-8x=\underline{2{,}6A-5x}$

Известно, что $2{,}6A-5x=2580000$

Подставим $A=1300000$: $2{,}6\cdot 1300000-5x=2580000$
$$5x=3380000-2580000$$
$$5x=800000$$
$$x=160000 \text{ (руб)}$$

Первая выплата была в 2026, тогда в 2030-м была 5-я выплата. По таблице долг в ~~начале~~ июле 2030-го был равен ~~[illegible]~~ $A-5x$. Найдем:

$$A-5x=1300000-5\cdot 160000=1300000-800000=$$
$$=500000 \text{ (руб)}.$$

~~Ответ: 500 тыс. руб~~

Ответ: 500000 руб

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 16.1.3

В июле 2025 года планируется взять кредит на десять лет в размере 1300 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг будет возрастать на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;

— в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

— в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

— к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 2580 тыс. рублей. Сколько рублей составит долг в июле 2030 года?

Ответ: 500 тыс. рублей.

w/б.

Т.к. долг погашается равными выплатами – x – выпл. на погашение долга – 2026 – 2030 годах

y – выплаты на погашение долга с 2031 – 2035 г.

из условия следует, что $5x + 5y = 1300$

$\Rightarrow 5(x+y) = 1300 \Rightarrow x+y = 260$, $\cdot 1{,}2$ – начисл. процентов

Схема 1

1300 (2025) $\nearrow$ $1300 \cdot 1{,}2$ $\searrow$ $1300 - x$ (2026) $\nearrow$ $(1300 - x)\cdot 1{,}2$ $\searrow$ $1300 - 2x$ (2027) $\nearrow$ $(1300 - 2x)\cdot 1{,}2$ $\searrow$ $1300 - 3x$ (2028) $\nearrow$ $(1300 - 3x)\cdot 1{,}2$

$\searrow$ $1300 - 4x$ (2029) $\nearrow$ $(1300 - 4x)\cdot 1{,}2$ $\searrow$ $1300 - 5x$ (2030) – нужно найти

Сумма выплат = сумма долга + погаш. проценты $\Rightarrow$

Погашенные проценты: $2580 - 1300 = 1280$ $\Rightarrow$

Из схемы 1 сумма платежей за первые 5 лет, пусть $S = 1300$ $\Rightarrow$

26 г. 1-й $S \cdot 1{,}2 - (S - x) = S \cdot 1{,}2 - S + x$

27 г. 2-й $(S - x)1{,}2 - (S - 2x) = S \cdot 1{,}2 - 1{,}2x - S + 2x$

28 г. 3-й $(S - 2x)\cdot 1{,}2 - (S - 3x) = S \cdot 1{,}2 - 2x \cdot 1{,}2 - S + 3x$

29 г. 4-й $(S - 3x)\cdot 1{,}2 - (S - 4x) = S \cdot 1{,}2 - 1{,}2 \cdot 3x - S + 4x$

30 г. 5-й $(S - 4x)\cdot 1{,}2 - (S - 5x) = S \cdot 1{,}2 - 4x \cdot 1{,}2 - S + 5x$

=> сумма выплат за первые 5 лет:

$\frac{12}{10}(S+S-x+S-2x+S-3x+S-4x)-(S-x+S-2x+S-3x+S-4x+S-5x)$

$=6S-12x-5S+15x \Rightarrow S+3x$ (первые 5 лет)

Выплаты послед. 5 лет

$31г\ (S-5x)\cdot 1{,}2)-(S-5x-y)$

$32г.\ (S-5x-y)\cdot 1{,}2-(S-5x-2y)$

$33г.\ (S-5x-2y)\cdot 1{,}2-(S-5x-3y)$

$34г.\ (S-5x-3y)\cdot 1{,}2-(S-5x-4y)$

$35г.\ (S-5x-4y)\cdot 1{,}2-(S-5x-5y)$

Сумма выплат: $1{,}2(S-5x+S-5x-y+S-5x-2y+S-5x-3y+S-5x-4y)-(S-5x-y+S-5x-2y+S-5x-3y+S-5x-4y+S-5x-5y)$

$\Rightarrow 1{,}2(5S-25x-10y)-(5S-25x-15y)$

$\Rightarrow \frac{12}{10}\cdot 5S-\frac{12\cdot 25}{10}x-\frac{10\cdot 12}{10}y-5S+25x+15y \Rightarrow 6S-6x-12y-5S+25x+15y \Rightarrow$

$S+19x+3y \Rightarrow$ Сумма выплат

=> Сумма выплат

$2580=S+3x+S+19x+3y \Rightarrow$

$2580=2S+22x+3y \Rightarrow 2580=2\cdot 1300+22x+3y$

$2580-2600=22x+3y$

Комментарий.

Математическая модель не построена.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 16.2.1

В июле 2026 года планируется взять кредит на три года в размере 800 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг будет возрастать на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
— платежи в 2027 и 2028 годах должны быть равными;
— к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.
Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 1254,4 тыс. рублей. Сколько рублей составит платёж 2027 года?
Ответ: 200 тыс. рублей.

Пусть $S=800000$ руб - сумма взятая в кредит, тогда
m руб - выплата в 2027 и 2028 год
k руб - выплата в 2029 год
Обратим внимание, что при начислении процентов прослеживается закономерность: $S \xrightarrow[\text{процента}]{\text{начисл}} S+\frac{20}{100}S=S+0,2S=1,2S \xrightarrow[\text{процента}]{\text{начисл}} 1,2S+\frac{20}{100}\cdot 1,2S=$
$=1,2S(1+0,2)=1,2^2S$
Составим таблицу:

N	Сумма	Сумма+процент	Выплата	Остаток
1	S	$1,2S$	m	$1,2S-m$
2	$1,2S-m$	$1,2^2S-1,2m$	m	$1,2^2S-1,2m-m$
3	$1,2^2S-1,2m-m$	$1,2^3S-1,2^2m-1,2m$	k	0

По условию сумма всех выплат равна 1254400 руб: $2m+k=1254400$
$k=1254400-2m$

Кредит был полностью погашен:
$1,2^3S-1,2^2m-1,2m-k=0$ (Заменим k, на выражение: $k=1254400-2m$)
$1,2^3S-1,2^2m-1,2m-1254400+2m=0$
$0,64m=1,728S-1254400$
$m=\frac{1,728\cdot 800000-1254400}{0,64}=200000$ руб Ответ. 200000 руб

Комментарий.
Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 16.2.2

В июле 2026 года планируется взять кредит на три года в размере 800 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг будет возрастать на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
— платежи в 2027 и 2028 годах должны быть равными;
— к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.
Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 1254,4 тыс. рублей. Сколько рублей составит платёж 2027 года?
Ответ: 200 тыс. рублей.

Пусть $S = 800$ тыс руб - сумма кредита, процент $p = 20$,
платежи 2027 и 2028 г по x тыс руб каждый, y - платеж 2029 г
Каждый январь долг возрастает в $1+\frac{p}{100} = 1,2$ раза
Тогда получим систему уравнений:

$$\begin{cases} ((S\cdot 1{,}2 - x)\cdot 1{,}2 - x)\cdot 1{,}2 - y = 0 \\ 2x + y = 1254{,}4 \end{cases}$$

$$1{,}728S - 2{,}64x - y = 0$$

$$y = 1{,}728S - 2{,}64x$$

$$2x + 1{,}728S - 2{,}64x = 1254{,}4$$

$$0{,}64x = 1{,}728S - 1254{,}4$$

$$0{,}64x = 128$$

$$64x = 12800$$

$$x = 100$$

Ответ: 100 тыс. руб.

Комментарий.

Верно построена математическая модель. Линейное уравнение решено неверно.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 16.2.3

В июле 2026 года планируется взять кредит на три года в размере 800 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг будет возрастать на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

— платежи в 2027 и 2028 годах должны быть равными;

— к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 1254,4 тыс. рублей. Сколько рублей составит платёж 2027 года?

Ответ: 200 тыс. рублей.

Пусть март – месяц платежа

Пуст x – выплата в 2027 г. ~~[illegible]~~ = выплате в 2028 г.

Тогда y – выплата в 2029 г.

Дата	Долг
июль 2026	800
янв, март, июль — 2027	$0{,}2\cdot 800 = 160$ $\Rightarrow$ была выплата $= x$ $160 - x$
янв, март, июль — 2028	$0{,}2(160-x) = 32 - 0{,}2x$ $\Rightarrow$ была выпл. $= x$ $32 - 0{,}2x - x = 32 - 1{,}2x$
янв, март, июль — 2029	$0{,}2(32-1{,}2x) = 6{,}4 - 0{,}24x$ $\Rightarrow$ была выпл. $= y$ $6{,}4 - 0{,}24x - y$

$$\begin{cases} 6{,}4 - 0{,}24x - y = 0 \\ 2x + y = 1254{,}4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1254{,}4 - 2x \\ 6{,}4 - 0{,}24x - 1254{,}4 + 2x = 0 \end{cases}$$

$$1{,}76x - 1248 = 0$$

$$x = \frac{1248}{1{,}76}$$

$$x = \frac{7800}{11} \approx 709 \text{ тыс. р.}$$

Ответ: 709 тыс. р.

Комментарий.

Неверно построена математическая модель.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 16.3.1

15 января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн руб. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r – **целое** число;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн руб.)	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0

Найдите наименьшее значение r, при котором общая сумма выплат будет больше 1,2 млн руб.

Ответ: 5.

Всего было 6 выплат: $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$.

$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 > 1,2$

$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = S$

r	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	S
7	0,17	0,163	0,156	0,149	0,142	0,535	1,315
5	0,15	0,145	0,14	0,135	0,13	0,525	1,225
4	0,14	0,136	0,132	0,128	0,124	0,52	1,18

$P_1 = (1 + \frac{r}{100}) - 0,9$

$P_2 = 0,9(1 + \frac{r}{100}) - 0,8$

$P_3 = 0,8(1 + \frac{r}{100}) - 0,7$

$P_4 = 0,7(1 + \frac{r}{100}) - 0,6$

$P_5 = 0,6(1 + \frac{r}{100}) - 0,5$

$P = 0,5(1 + \frac{r}{100})$

Наименьшим числом r, при котором $S > 1,2$ является 5. При $r = 4$, $S < 1,2$.

Ответ: 5

Комментарий.

Математическая модель построена верно. Усложняет проверку отсутствие вычислений. В таблице все результаты вычислений по формулам, записанным справа, верные. Логика решения верна.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 16.3.2

15 января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн руб. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, причём r – **целое** число;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн руб.)	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0

Найдите наименьшее значение r, при котором общая сумма выплат будет больше 1,2 млн руб.

Ответ: 5.

Дано:
$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6>1{,}2$ млн , где x – выплата
$N=1$ – сумма кредита
r_{min} – ? , где r – % $r\in Z$

$x_1=N+\frac{rN}{100}-0{,}9$; $x_2=0{,}9+\frac{r\cdot 0{,}9}{100}-0{,}8$; $x_3=0{,}8+\frac{r\cdot 0{,}8}{100}-0{,}7$;
$x_4=0{,}7+\frac{r\cdot 0{,}7}{100}-0{,}6$; $x_5=0{,}6+\frac{r\cdot 0{,}6}{100}-0{,}5$; $x_6=0{,}5+\frac{r\cdot 0{,}5}{100}$

$1+\frac{r}{100}-0{,}9+0{,}9+\frac{r\cdot 0{,}9}{100}-0{,}8+0{,}8+\frac{r\cdot 0{,}8}{100}-0{,}7+0{,}7+\frac{r\cdot 0{,}7}{100}-0{,}6+0{,}6+$
$+\frac{r\cdot 0{,}6}{100}-0{,}5+0{,}5+\frac{r\cdot 0{,}5}{100}>1{,}2$

$1+\frac{3{,}5r}{100}>1{,}2$ $\qquad r>\frac{20}{3{,}5}$ $\qquad$ Ответ : $r=5\%$
$\frac{3{,}5r}{100}>0{,}2$ $\qquad r_{min}=5\%$

Комментарий.

Математическая модель построена верно. Допущены ошибки: $1+\dfrac{4{,}5r}{100}>1{,}2$, а не $1+\dfrac{3{,}5r}{100}>1{,}2$; $\dfrac{20}{3{,}5}>5{,}7$, т.е. должно быть $r=6$.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 16.3.3

15 января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн руб. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r – **целое** число;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг(в млн руб.)	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0

Найдите наименьшее значение r, при котором общая сумма выплат будет больше 1,2 млн руб.

Ответ: 5.

месяц	сумма долга 1-го числа (млн р)	сумма долга (млн) 15-го числа	сумма выплат
1		1млн	
2	$1+1\cdot r$	0,9	$1+1r-0,9$
3	$0,9+0,9\cdot r$	0,8	$0,9+0,9-0,8$
4	$0,8+0,8r$	0,7	$0,8+0,8r-0,7$
5	$0,7+0,7\cdot r$	0,6	$0,7+0,7r-0,6$
6	$0,6+0,6r$	0,5	$0,6+0,6r-0,5$
7	$0,5+0,5r$	0	$0,5+0,5r$

тогда общая сумма выплат:

$$1+1\cdot r-\cancel{0,9}+\cancel{0,9}+0,9r-\cancel{0,8}+\cancel{0,8}+0,8r-\cancel{0,7}+\cancel{0,7}+0,7r-$$
$$-\cancel{0,6}+\cancel{0,6}+0,6r-\cancel{0,5}+\cancel{0,5}+0,5r=$$
$$=1+r+0,9r+0,8r+0,7r+0,6r+0,5r=1+4,5r$$

Общая сумма выплат должна быть больше 1,2 млн =>

$$\Rightarrow 1+4,5r>1,2$$
$$4,5r>0,2$$
$$r>2,25$$

т.к. r-целое число, то наименьшее $r=3$.

Ответ: r наименьшее $=3$

Комментарий.

Математическая модель построена неверно. Если подставить в таблицу число 3 вместо r, то сумма долга уже на 1-е число второго месяца должна составить 4 млн руб. Кроме того, ещё и неравенство решено неверно.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 16.4.1

15 января планируется взять кредит в банке на 39 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 20% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Ответ: 1.

S - сумма, которую взяли в кредит

x - сумма, на которую каждый раз уменьшается долг.

$\frac{r\%}{100} = n$, где на $r\%$ возрастает долг.

	банк	выплаты
1.	$S+Sn$	$Sn+x$
2.	$S-x+(S-x)n$	$(S-x)n+x$
⋮		
39.	$S-38x+(S-38x)n$	$(S-38x)n+x$ $\Rightarrow S-38x+(S-38x)n=(S-38x)n+x \Rightarrow$ $\Rightarrow S=39x$
40.	0	

Z - сумма выплат

По условию: $Z-S=0{,}2S$

$$Z = Sn+x+(S-x)n+x+\ldots+(S-38x)n+x = 39x+n(39S-(x+2x+\ldots+38x)) = 39x+n\left(39S-x\left(\frac{1+38}{2}\cdot 38\right)\right) = 39x+n\cdot 39S-nx\cdot 39\cdot 19 = 39x+n\cdot 39\cdot 39x-n\cdot 39\cdot 19x = 39x+39\cdot 20nx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 39x+39\cdot 20nx-39x=0{,}2\cdot 39x \Rightarrow 39\cdot 20nx=0{,}2\cdot 39x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n=\frac{0{,}2}{20}=\frac{1}{100}; \quad r=n\cdot 100 \Rightarrow r=1\%$$

Ответ: 1%.

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 16.4.2

15 января планируется взять кредит в банке на 39 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 20% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Ответ: 1.

Всего 39 месяцев. Пусть сумма, взятая в кредит – S. Пусть $k = \frac{r}{100}$ – коффициент начисления процентов. ~~Тогда~~. Выплаты каждый месяц будут состоять: из части долга $\frac{S}{39}$ + проценты за месяц.

Проценты за месяц, вычисляются по формуле:

1 месяц. 2 м. 3 м 39 м.

$$S \cdot k + \frac{38 S\cdot k}{39} + \frac{37 S\cdot k}{39} \ldots \frac{S\cdot k}{39}.$$

Применим формулу арифметической прогрессии

$$N = \left(\frac{x_1 + x_n}{2}\right)\cdot n$$

$$\text{Проценты} = \left(\frac{S\cdot k + \frac{S\cdot k}{39}}{2}\right)\cdot 39 = \frac{39 S\cdot k + S\cdot k}{2} = \frac{40 S\cdot k}{2} = 20 S k.$$

Часть долга:

1 м 2 м 39 м

$$\frac{S}{39} + \frac{S}{39} + \ldots + \frac{S}{39} = S.$$

Общие выплаты: $k = \frac{r}{100}$

$S + 20\cdot S\cdot k = 1,2\cdot S$ $0,01\cdot 100 = r \Rightarrow r = 1\%$

$20k = 0,2.$ Ответ: 1%

$k = 0,01$

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

5. Критерии проверки и оценка решений задания 17

Задание № 17 — это планиметрическая задача. В пункте *а* нужно **доказать** геометрический факт, в пункте *б* – найти (вычислить) геометрическую величину.

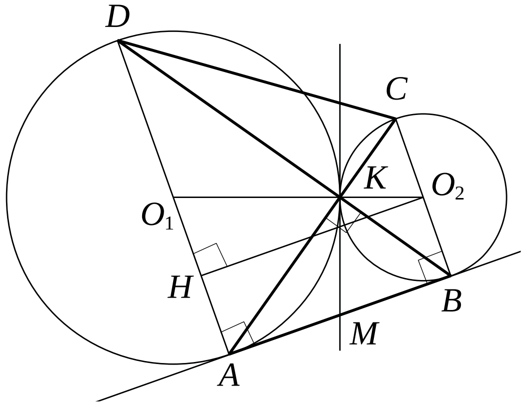
Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*3*

Задача 17 (демонстрационный вариант ЕГЭ 2024 г.)

Две окружности касаются внешним образом в точке K. Прямая AB касается первой окружности в точке A, а второй – в точке B. Прямая BK пересекает первую окружность в точке D, прямая AK пересекает вторую окружность в точке C.

а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника AKB, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.



Решение. а) Обозначим центры окружностей O_1 и O_2 соответственно. Пусть общая касательная, проведённая к окружностям в точке K, пересекает AB в точке M. По свойству касательных, проведённых из одной точки, $AM = KM$ и $KM = BM$. Треугольник AKB, у которого медиана равна половине стороны, к которой она проведена, прямоугольный. Вписанный угол AKD прямой, поэтому он опирается на диаметр AD. Значит, $AD \perp AB$. Аналогично получаем, что $BC \perp AB$. Следовательно, прямые AD и BC параллельны.

б) Пусть, для определённости, первая окружность имеет радиус 4, а вторая – радиус 1.

Треугольники BKC и AKD подобны, $\frac{AD}{BC} = 4$. Пусть $S_{BKC} = S$, тогда $S_{AKD} = 16S$.

У треугольников AKD и AKB общая высота, следовательно, $\frac{S_{AKD}}{S_{AKB}} = \frac{DK}{KB} = \frac{AD}{BC}$, то есть $S_{AKB} = 4S$. Аналогично, $S_{CKD} = 4S$. Площадь трапеции $ABCD$ равна $25S$.

Вычислим площадь трапеции $ABCD$. Проведём к AD перпендикуляр O_2H, равный высоте трапеции, и найдём его из прямоугольного треугольника O_2HO_1:

$$O_2H = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1H^2} = 4.$$

Тогда

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot AB = 20.$$

Следовательно, $25S = 20$, откуда $S = 0{,}8$ и $S_{AKB} = 4S = 3{,}2$.

Ответ: б) 3,2.

Задание 17.1

Биссектрисы углов BAD и BCD равнобедренной трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Через точку O провели прямую, параллельную основаниям BC и AD.

а) Докажите, что отрезок этой прямой внутри трапеции равен её боковой стороне.

б) Найдите отношение длин оснований трапеции, если $AO = CO$ и данная прямая делит сторону AB в отношении $AM : MB = 1 : 2$.

Решение.

а) Прямые MO и AD параллельны, значит, $\angle MOA = \angle OAD$ (рис. 1). Следовательно, треугольник AMO равнобедренный и $AM = MO$. Аналогично $CN = NO$.

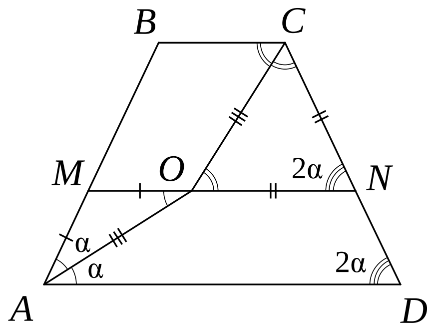


Рис. 1

Поскольку $MB = CN$, получаем:

$$AB = AM + CN = MO + ON = MN.$$

б) Пусть $\angle OAD = \angle OAM = \alpha$. Тогда

$$\angle CNO = \angle CDA = \angle BAD = 2\alpha.$$

Пусть $MO = AM = a$. Тогда

$$MB = CN = ON = 2a.$$

По теореме косинусов для треугольников AMO и CNO имеем:

$$AO^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cdot \cos\left(180^\circ - 2\alpha\right),$$

$$OC^2 = 4a^2 + 4a^2 - 8a^2 \cdot \cos 2\alpha,$$

откуда получаем:

$$2a^2 + 2a^2 \cdot \cos 2\alpha = 8a^2 - 8a^2 \cdot \cos 2\alpha;\ \cos 2\alpha = \frac{3}{5}.$$

Проведём высоты M_1M_2 и N_1N_2 через точки M и N соответственно (рис. 2) и найдём длины оснований трапеции:

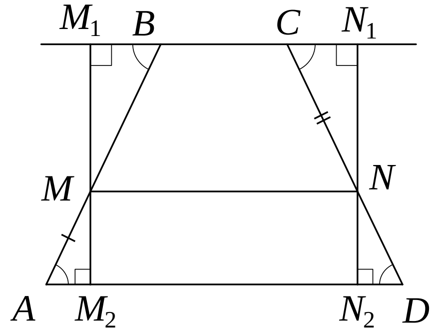


Рис. 2

$$AD = AM_2 + M_2N_2 + N_2D = MN + 2AM \cdot \cos 2\alpha = = 3a + \frac{6}{5}a = \frac{21}{5}a,$$

$$BC = M_1N_1 - M_1B - CN_1 = MN - 2BM \cdot \cos 2\alpha = = 3a - \frac{12}{5}a = \frac{3}{5}a.$$

Таким образом, $BC : AD = 1 : 7$.

Ответ: б) $1:7$.

Задание 17.2

В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH. На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.

а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.

б) Найдите отношение BH к ED, если $\angle BCD = 120°$.

Решение.

а) Поскольку

$$\angle ABC = \angle AHC = \angle ECD = \angle EAD = 90°,$$

около четырёхугольников $ABCH$ и $AECD$ можно описать окружности (рис. 1).

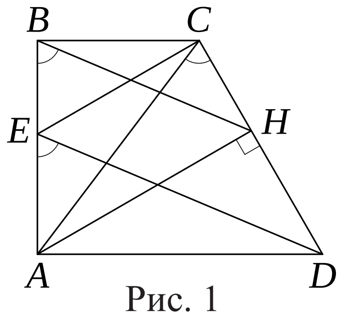


Рис. 1

Значит,

$$\angle ABH = \angle ACH = \angle ACD = \angle AED,$$

то есть прямые BH и ED параллельны.

б) Опустим из точки B перпендикуляр BK на прямую CD (рис. 2). Стороны KH и CD треугольников BKH и ECD лежат на одной прямой, а стороны BK и EC, BH и ED попарно параллельны. Значит, треугольники BKH и ECD подобны.

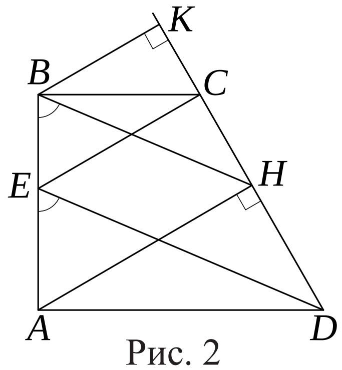


Рис. 2

Поскольку

$$BK = BC \cdot \sin\angle BCK = EC \cdot \cos\angle ECB \cdot \sin\angle BCK =$$

$$= EC \cdot \cos 30° \cdot \sin 60° = \frac{3}{4} EC,$$

коэффициент подобия равен $\frac{3}{4}$. Значит,

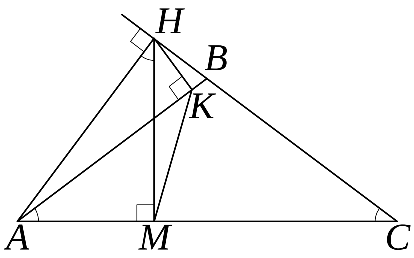
$$BH : ED = 3 : 4.$$

Ответ: б) $3:4$.

Задание 17.3

В равнобедренном тупоугольном треугольнике ABC на продолжение боковой стороны BC опущена высота AH. Из точки H на сторону AB и основание AC опущены перпендикуляры HK и HM соответственно.
а) Докажите, что отрезки AM и MK равны.
б) Найдите MK, если $AB = 5,\ AC = 8$.

Решение.



а) Поскольку $\angle AMH = \angle AKH = 90°$, около четырёхугольника $AMKH$ можно описать окружность с диаметром AH. Получаем:

$$\angle BAC = \angle BCA = 90° - \angle HAC = \angle AHM,$$

поэтому $AM = MK$ как хорды, стягивающие равные дуги.

б) В прямоугольных треугольниках AHM и ACH имеем:

$$AM = AH \cdot \cos\angle HAM = AC \cdot \cos^2\angle HAM = AC \cdot \left(1 - \cos^2\angle ACB\right).$$

Поскольку $\cos\angle ACB = \dfrac{AC}{2BC} = \dfrac{4}{5}$, получаем:

$$MK = AM = \frac{72}{25}.$$

Ответ: б) $\dfrac{72}{25}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*3*

Задание 17.4

В остроугольном треугольнике ABC все стороны различны. Прямая, содержащая высоту BH треугольника ABC, вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке K. Отрезок BN – диаметр этой окружности.

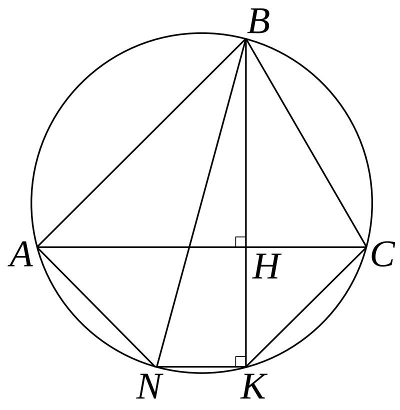
а) Докажите, что $AN = CK$.

б) Найдите NK, если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен 16, $\angle BAC = 40°$, $\angle ACB = 85°$.

Решение.

а) Поскольку BN – диаметр описанной около треугольника ABC окружности, получаем

$$\angle ABN = 90° - \angle ANB = 90° - \angle ACB =$$
$$= 90° - \angle HCB = \angle CBH = \angle CBK.$$



Следовательно, хорды AN и CK стягивают равные дуги, а значит, они равны.

б) Пусть $R = 16$ – радиус окружности, описанной около треугольника ABC. Имеем:

$$\angle ABN = \angle CBH = 90° - \angle HCB = 5°,$$
$$\angle ABC = 180° - \angle BAC - \angle ACB = 55°;$$
$$\angle KBN = \angle ABC - \angle ABN - \angle CBK = 45°.$$

Следовательно, по теореме синусов

$$NK = 2R \cdot \sin\angle KBN = 2R \cdot \sin 45° = 16\sqrt{2}.$$

Ответ: б) $16\sqrt{2}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*3*

Примеры оценивания решений задания 17

Пример 17.1.1

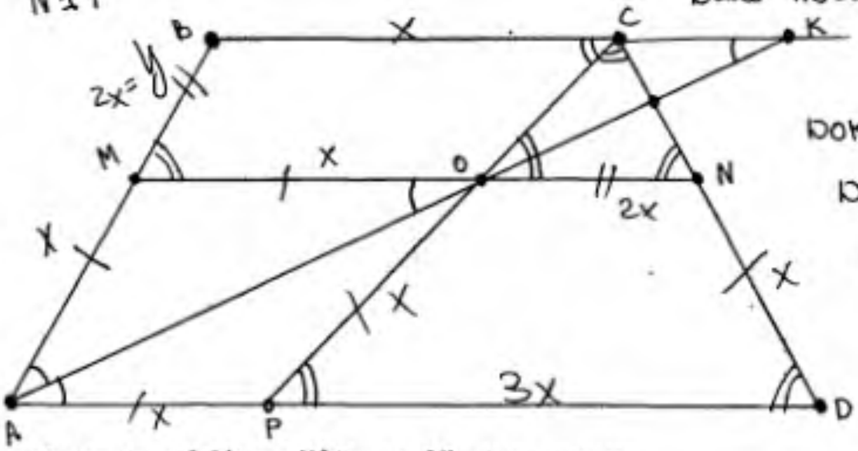
Биссектрисы углов BAD и BCD равнобедренной трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Через точку O провели прямую, параллельную основаниям BC и AD.

а) Докажите, что отрезок этой прямой внутри трапеции равен её боковой стороне.

б) Найдите отношение длин оснований трапеции, если $AO = CO$ и данная прямая делит сторону AB в отношении $AM : MB = 1 : 2$.

Ответ: б) $1 : 7$.

N 17



Дано: ABCD – р/б трапеция; AK, CP – биссектриса; MN ∥ BC ∥ AD; AO=CO; $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{2}$

Док-ть: MN = AM = CD

Док-во:

1) ∠KAD = ∠BKA, т.к. накрестлеж. при AD ∥ BC и сек. AK, т.к. лежит на продолжении BC

2) пусть ∠BAK = ∠KAD, т.к. AK – биссектриса = α; ∠BKA = α, по док. выше

3) ∠OAD = ∠MOA = α при MN ∥ AD и секущей AK

4) ∠AMO – р/б, т.к. ∠MAO = ∠MOA = α, следовательно AM = MO

5) AM = ND, т.к. MN – отрезок, параллельной основаниям в р/б трапеции, отсюда AMND – р/б трапеция, т.к. ∠MAD = ∠NDA, по усл., ∠AMN = ∠MND = 180 – 2α, по свойству ~~параллельных~~ односторонних углов при MN ∥ AD и секущих AM и DN

6) ∠BCP = ∠CPD = β, т.к. накрестлежащие при BC ∥ AD и секущей PC

6) ∠CON = ∠CPD = β, т.к. соответственные при MN ∥ AD и секущей PC

7) ∠BCP = ∠PCD = β, т.к. PC – биссектриса, отсюда △PCD – р/б, значит CD = PD

8) MBCN – р/б трапеция, т.к. BC ∥ MN, и ∠MBC = ∠BCN, по усл., ∠BMN = ∠MNB = 180° – 2β, т.к. односторонние при при BC ∥ MN и секущих BM и CN, следовательно BM = CN

9) ∠CNO – р/б, т.к. ∠PCN = ∠CON = β, отсюда ON = CN

10) пусть AM = x, MB = y, тогда AB = AM + MB = x + y

II) по доказанному выше $AM = MO = x$
$BM = CN = ON = y$, значит $MN = MO + ON = x + y$

Отсюда $MN = AB = CD = x + y$ Ч.Т.Д.

б) ~~дано~~ Найти: $\frac{BC}{AD}$ -?

1) $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{2}$, $AM = x$, $MB = y$, $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$, значит $y = 2x$

2) $AMOP$ - ромб, т.к. $AM = MO$, по док. выше, а AO - диагональ и биссектриса, значит $AP = PO = AM = MO = x$

3) $AM \parallel PO$, т.к. $AMOP$ - ромб, значит $\angle MAD = \angle OPD$, т.к. соответственные при $AM \parallel PO$ и секущей AD, отсюда $2\alpha = \beta$, значит $\angle BAD = \angle CDA$

4) $\angle CNO = \angle CDP = 2\alpha = \beta$, т.к. соотв при $MN \parallel AD$ и сек. CD

5) $\triangle CON$ и $\triangle CPD$ - равносторонние, т.к. мы доказали, что все углы в них равны, а значит равны $60°$, отсюда $OC = CN = ON$; $PC = CD = DP$

6) $CN = 2x$; $ND = x$; $CD = CN + ND = 2x + x = 3x$; $CD = PD = 3x$, по док. выше

7) $MBCO$ - параллелограмм, т.к. $BC \parallel MO$, так же по док. выше $2\alpha = \beta$, значит $\angle BMO = \angle BAP = 2\alpha = \beta$, т.к. соответственные при $MN \parallel AD$ и сек. AB,
$\angle BMO = \angle BCO$,
отсюда $MO = BC = x$

8) $AD = AP + PD = x + 3x = 4x$

9) $\frac{BC}{AD} = \frac{x}{4x} = \frac{1}{4}$

Ответ: б) $\frac{1}{4}$

Комментарий.

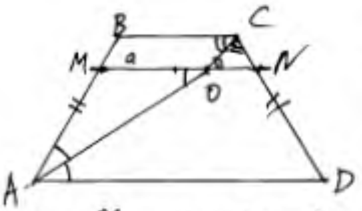
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, в пункте *б* получен неверный ответ не из-за арифметической ошибки.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 17.1.2

№17.

Дано: $ABCD$ – р/б трап., AO – бисс. $\angle BAD$, CO – бисс. $\angle BCD$. $a \parallel BC \parallel AD$, $O \in a$.



а) Док. $MN = AB$.

б) $\frac{BC}{AD}$ – ?, $AO = CO$, $AM : MB = 1 : 2$.

а) $M = a \cap AB$, $N = a \cap CD$. AO – бисс. $\Rightarrow \angle BAO = \angle OAD$.

CO – бисс. $\Rightarrow \angle BCO = \angle OCD$.

Т.к. $BC \parallel MN \parallel AD$, то $\angle MOA = \angle OAD$ и $\angle NOC = \angle OCB$ как НЛУ.

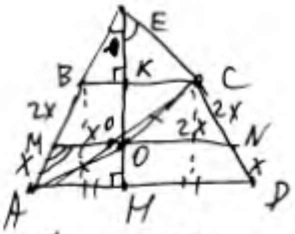
Тогда $\angle BAO = \angle MOA \Rightarrow \triangle AMO$ – р/б $\Rightarrow AM = MO$.

$\angle CON = \angle NOC \Rightarrow \triangle CNO$ – р/б $\Rightarrow CN = NO$.

$\angle BMN = \angle BAD$ и $\angle CNO = \angle CDA$ как СУ ($MN \parallel AD$)

Значит, $BCND$ – р/б трапеция $\Rightarrow BM = CN$.

Тогда $MN = MO + ON = AM + CN = AM + BM = AB$ Чтд.



№17(б).

Пусть $AM = x$, $MB = 2x$, $\angle AMO = \alpha$, $\angle ADC = 180° - \alpha$

Тогда $MO = x$, $ON = CN = 2x$

Д.п.: $AB \cap CD = E$. Т.к. $\angle BAD = \angle CDA$, то $\triangle AED$ – р/б.

Д.п. EH – медиана, высота и бисс. $\triangle AED$.

Из $\triangle AOM$ и $\triangle OCN$ по т. кос. $AO = OC = x^2 + x^2 - 2x \cdot x\cos\alpha =$
$= 4x^2 + 4x^2 + 2 \cdot 2x \cdot 2x\cos\alpha$

$6x^2 = -10x^2\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{3}{5}$. $\cos\angle BAD = \cos\angle CDA = \frac{3}{5}$. $\sin\angle BAD = \frac{4}{5}$.

$AD = BC + 2AB\cos\angle BAD = BC + \frac{6}{5}AB$

$\angle EBC = \angle EAD$ (СУ.) $\angle BEH$ – общий $\Rightarrow \triangle BEK \sim \triangle AEH$.

BK – медиана $\triangle BEC$

$\frac{BC}{AD} = \frac{BK}{AH} = \frac{BE}{AE} = \frac{BE}{BE + AB}$

$BE = \frac{BC}{2\sin\angle BEC} = \frac{BC}{2\cos\angle BAH} = \frac{5}{6}BC$

$BC(\frac{5}{6}BC + AB) = AD \cdot \frac{5}{6}BC$

$\triangle ENO \sim \triangle EDH$ (по 2 углам).

$\frac{EN}{ED} = \frac{BC}{DN}$ $\frac{EC + 2x}{EC + 3x} = \frac{BC}{2x}$ $2x(EC + 2x) = BC(EC$

Комментарий.

Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, решение задания пункта *б* не завершено.

Оценка эксперта: 1 балл.

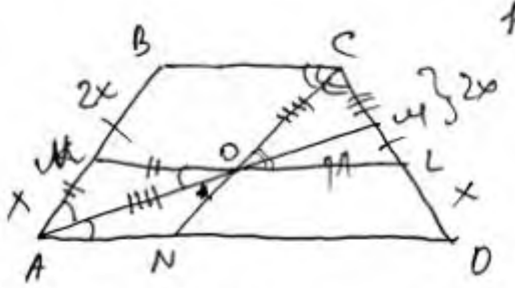
Пример 17.1.3

Биссектрисы углов BAD и BCD равнобедренной трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Через точку O провели прямую, параллельную основаниям BC и AD.

а) Докажите, что отрезок этой прямой внутри трапеции равен её боковой стороне.

б) Найдите отношение длин оснований трапеции, если $AO = CO$ и данная прямая делит сторону AB в отношении $AM : MB = 1 : 2$.

Ответ: б) $1:7$.



17. $\cancel{MKL} \parallel BC \parallel AD$

а) Док-ть: ~~MKL = AB~~ $ML = AB$

б) $\frac{AD}{BC}$ – Найти

Решение:

1) $\angle NAO = \angle MOA$ как н/л при $\parallel$ MKL и AD, секущей AO.

2) В $\triangle AOM$ $\angle A = \angle O \Rightarrow AM = MO$ (по пр. р/б $\triangle$)

3) $\angle BCO = \angle COL$ как н/л при $\parallel BC$ и KL, секущей CO

4) В $\triangle COL$: $\angle C = \angle O \Rightarrow CL = LO$ (по пр. р/б $\triangle$)

5) $\angle BML = \angle BAN$ и $\angle CLM = \angle CDA$ как соотв. при $\parallel ML$ и AD секущих AB и CD. $\Rightarrow$ Трапеция $BMLC$ – р/б (по пр.), $BM = CL$

6) $BM = CL = LO$. $AM = MO$. $BM + AM = LO + MO = ML$. $AB = ML$ ЧТД.

7) $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{2}$. Пусть $AM = LD = x$; $MB = LC = 2x$. Тогда из п. 4 $ML = 3x$

~~$x \geq \frac{380}{21} \Rightarrow x \geq$~~ $x \geq \frac{0{,}79y}{0{,}21}$.

Если в класс придет новая девочка, то их будет $(y+1)$.

По усл.: $\frac{y+1}{x+y+1} = 0{,}3 \Leftrightarrow y + 1 = 0{,}3x + 0{,}3y + 0{,}3$

$0{,}7y - 0{,}3x + 0{,}7 = 0 \quad |\cdot 10$

$7y - 3x + 7 = 0$

$3x = 7y + 7$

$x = \frac{7y+7}{3}$

Подставим x в $x \geq \frac{0{,}79y}{0{,}21}$:

$\frac{7y+7}{3} \geq \frac{79y}{21} \quad |\cdot 21 \Rightarrow 7(7y+7) \geq 79y$

$49y + 49 \geq 79y$

$30y \leq 49$ $\quad y \leq \frac{49}{30}$

Т.к. $y \in Z$, то единственное возможное $y = 1$.

Тогда $x = \frac{7 \cdot 1 + 7}{3} = \frac{14}{3} \notin N$.

Нет, такое невозможно.

$$S_{MBCL} = \frac{BC+3x}{2} \cdot \frac{2}{3}h = \frac{hBC+3xh}{3}, \text{ где } h \text{ - высота.}$$

$$S_{AMLD} = \frac{AD+3x}{2} \cdot \frac{1}{3}h = \frac{hAD+3xh}{6}$$

$$S_{MBCL} + S_{AMLD} = \frac{2hBC+6xh+hAD+3xh}{6} = \frac{2hBC+hAD+\overset{9}{\cancel{12}}xh}{6}$$

$$S_{ABCD} = \frac{BC+AD}{2}h$$

$$S_{ABCD} = S_{MBCL} + S_{AMLD} \Leftrightarrow \frac{2hBC+hAD+\overset{9}{\cancel{12}}xh}{6} = \frac{BC+AD}{2}h \;\Big|\cdot\frac{3}{h}$$

$$2BC+AD+\overset{9}{\cancel{12}}x = 3BC+3AD$$

$$\underline{BC+2AD=9x}.$$

Комментарий.
Утверждение в пункте *а* не доказано, решение задания пункта *б* не завершено.

Оценка эксперта: 0 баллов.

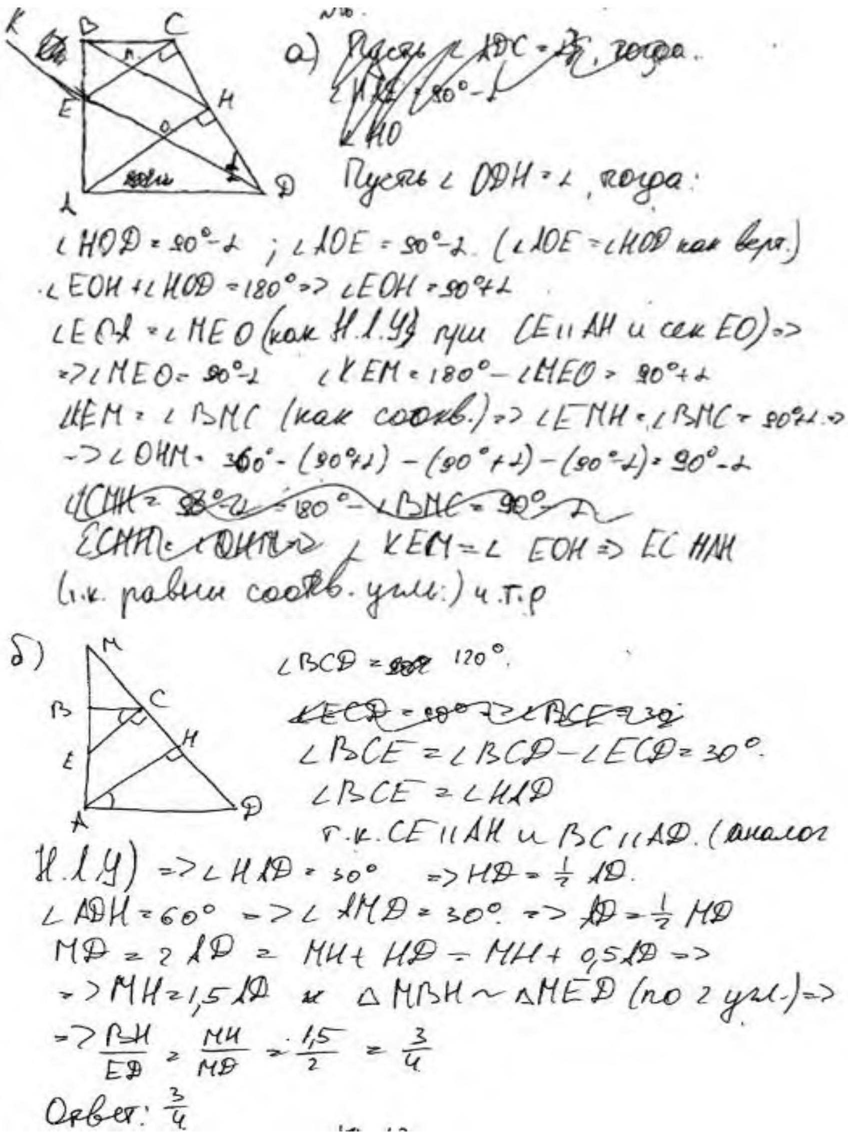
Пример 17.2.1

В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH. На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.

а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.

б) Найдите отношение BH к ED, если $\angle BCD = 120°$.

Ответ: б) $3:4$.



Комментарий.

В данном решении есть попытка доказательства утверждения пункта *а*. Логическая ошибка содержится в записи $\angle KEM = \angle BMC$ – это возможно только при параллельности прямых BH и ED, а как раз это и требовалось доказать. Верный ответ в пункте *б* получен обоснованно с использованием недоказанного утверждения пункта *а*.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 17.2.2

В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH. На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.

а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.

б) Найдите отношение BH к ED, если $\angle BCD = 120°$.

Ответ: б) $3:4$.

Дано:

ABCD-трапеция

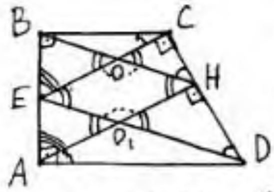
$BC \perp AB \perp AD$

$AH \perp CD$

$CE \perp CD$

а) Доказать:

$BH \parallel ED$



Доказательство:

1) т.к. $AH \perp CD$ и $CE \perp CD$, то $AH \parallel CE$;

2) AB – секущая при двух $\parallel$ прямых, значит $\angle BEC = \angle BAH$; 3) BH – тоже секущая, значит $\angle BOE = \angle COH = \angle BHA$;

4) ED – тоже секущая, значит $\angle CED = \angle EO_1A = \angle HO_1D$;

5) $\angle EOH = 180° - \angle COH$ (смеж. углы), $\angle EO_1H = 180° - \angle BHA$. т.к. $\angle COH = \angle BHA$, то $\angle EOH = \angle EO_1H$, следовательно, $EOHO_1$ – параллелограм, а его противолежащие стороны = и $\parallel$, значит, $BH \parallel ED$.

Комментарий.

Имеется попытка доказательства утверждения пункта *а*. Логическая ошибка содержится в записи 5) – при вычислении угла EO_1H: $\angle EO_1H = 180° - \angle EO_1A$. Замена угла $\angle EO_1A$ углом $\angle BHA$ возможна только при условии параллельности прямых BH и ED, а как раз это и требовалось доказать.

Оценка эксперта: 0 баллов.

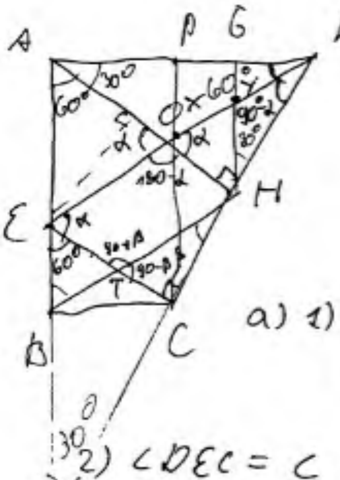
Пример 17.2.3

В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH. На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.

а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.

б) Найдите отношение BH к ED, если $\angle BCD = 120°$.

Ответ: б) $3:4$.



№16.

Дано: $AH \perp CD$ $\angle BCD = 120°$

$CE \perp CD$ и $CE \cap AB = E$

а) Д-ть: $BH \parallel ED$

б) $\frac{BH}{ED}$ – ?

а) 1) $\left.\begin{matrix} AH \perp CD \\ CE \perp CD \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ пар. перп. прямых $AH \parallel EC$

2) $\angle DEC = \angle OOH = \alpha$ как соотв.

~~3) $\angle ODH = 90° - \alpha$~~

4) Пусть $AB = x$ $AH = y$ ~~5) ΔBET~~

5) $\Delta BET \sim \Delta BAH$ по 2-м углам ($\angle ABH$ – общий, $\angle BET = \angle BAH$ как соотв.) k – коэффициент подобия

6) $AE = AB - BE = AB - kAB = x(1-k)$

$AO = AH - OH = AH - kAH = y(1-k)$

7) $\Delta AEO \sim \Delta ABH$ по углу и 2-м сторонам ($\angle A$ – общий; $\frac{AO}{AH} = 1-k$ и $\frac{AE}{AB} = 1-k$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AED = \angle ABH$

8) т.к. $\angle AEO = \angle ABH$, то по признаку параллельности прямых (прямые парал., если соотв. углы равны) $ED \parallel BH$ ч. т. д.

Комментарий.

Логическая ошибка: доказательство утверждения пункта *а* опирается на дополнительное условие из пункта *б*.

Оценка эксперта: 0 баллов.

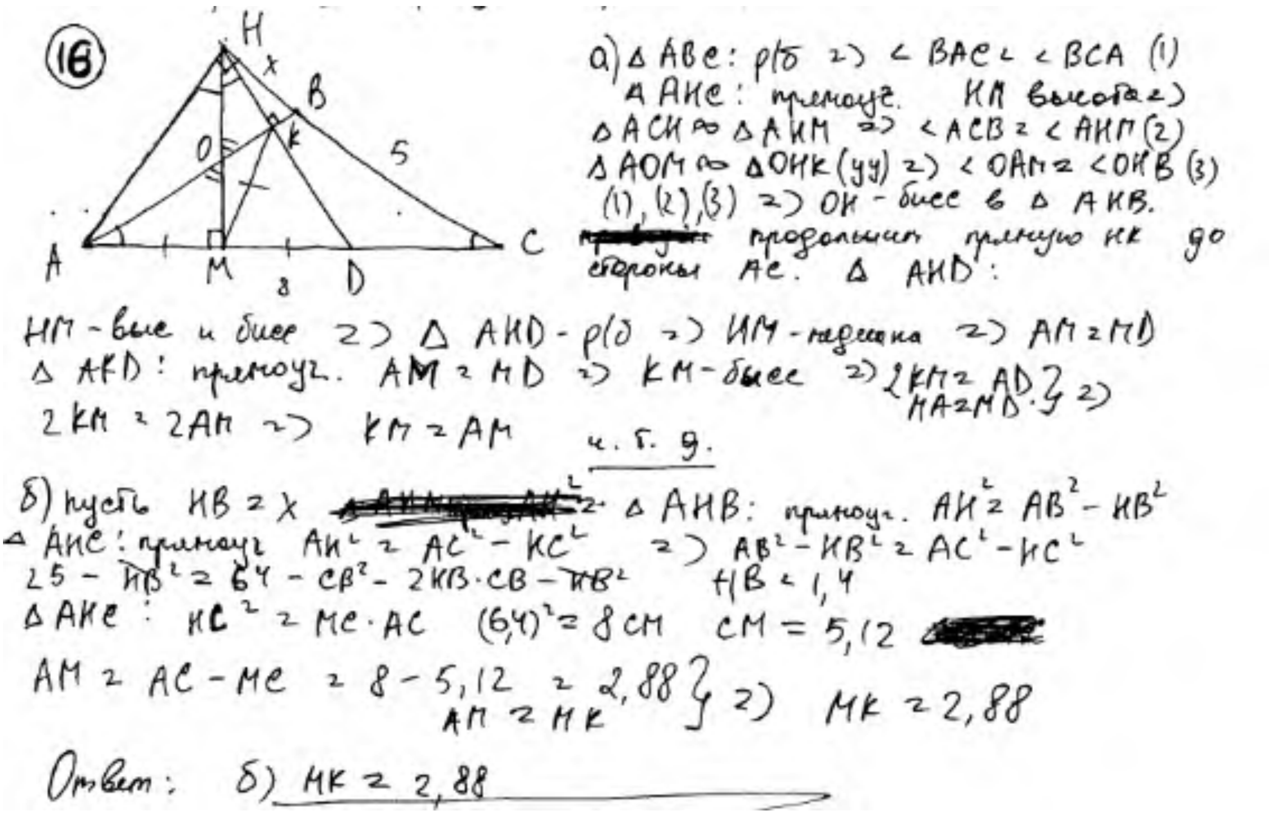
Пример 17.3.1

В равнобедренном тупоугольном треугольнике ABC на продолжение боковой стороны BC опущена высота AH. Из точки H на сторону AB и основание AC опущены перпендикуляры HK и HM соответственно.

а) Докажите, что отрезки AM и MK равны.

б) Найдите MK, если $AB = 5$, $AC = 8$.

Ответ: б) $\frac{72}{25}$.



а) ΔABC: р/б $\Rightarrow \angle BAC = \angle BCA$ (1)
ΔAHC: прямоуг. KM высота $\Rightarrow$
$\Delta ACH \sim \Delta AKM \Rightarrow \angle ACB = \angle AKM$ (2)
$\Delta AOM \sim \Delta OHK$ (уу) $\Rightarrow \angle OAM = \angle OKB$ (3)
(1), (2), (3) $\Rightarrow OK$ – бисс в ΔAKB.
продолжим прямую HK до стороны AC. ΔAHD:
HM – выс и бисс $\Rightarrow \Delta AHD$ – р/б $\Rightarrow HM$ – медиана $\Rightarrow AM = MD$
ΔAKD: прямоуг. $AM = MD \Rightarrow KM$ – бисс $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2KM = AD \\ MA = MD \end{array} \right\} \Rightarrow$
$2KM = 2AM \Rightarrow KM = AM$ ч. т. д.

б) пусть $HB = x$ ... ΔAHB: прямоуг. $AH^2 = AB^2 - HB^2$
ΔAHC: прямоуг $AH^2 = AC^2 - HC^2 \Rightarrow AB^2 - HB^2 = AC^2 - HC^2$
$25 - \cancel{HB^2} = 64 - CB^2 - 2HB \cdot CB - \cancel{HB^2}$ $HB = 1,4$
ΔAHC: $HC^2 = MC \cdot AC$ $(6,4)^2 = 8\,CM$ $CM = 5,12$
$\left. \begin{array}{l} AM = AC - MC = 8 - 5,12 = 2,88 \\ AM = MK \end{array} \right\} \Rightarrow MK = 2,88$

Ответ: б) $MK = 2,88$

Комментарий.

В доказательстве пункта *а* некорректно указано, что KM – биссектриса, при этом тут же записаны утверждения относительно KM, соответствующие медиане прямоугольного треугольника.

Решение пункта *б* выполнено верно.

Оценка эксперта: 3 балла.

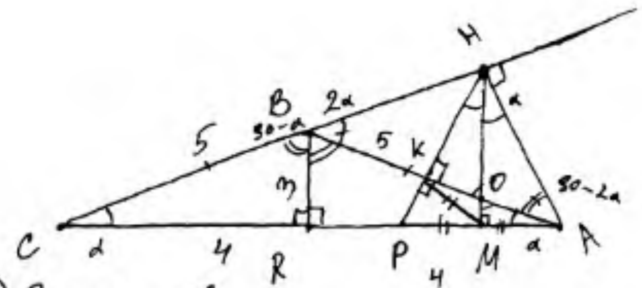
Пример 17.3.2

В равнобедренном тупоугольном треугольнике ABC на продолжение боковой стороны BC опущена высота AH. Из точки H на сторону AB и основание AC опущены перпендикуляры HK и HM соответственно.

а) Докажите, что отрезки AM и MK равны.

б) Найдите MK, если $AB = 5,\ AC = 8$.

Ответ: б) $\frac{72}{25}$.



Дано:
$\angle ABC > 90°$
$AB = 5$
$AB = BC$
$AC = 8$
$AH \perp BC$
$HK \perp AB$
$HM \perp AC$

Доказать: а) $AM = MK$ − ?

Найти: б) MK − ?

а) Доказательство:

Пусть $\angle BCA = \alpha$.
Т.к. $\triangle ABC$ – равнобедренный, то и $\angle BAC = \alpha$.

$\angle CBA = 180 - 2\alpha$

Пусть $BR \perp AC$, тогда $CR = RA$,
$\angle CBR = \angle RBA = \frac{\angle CBA}{2} = \frac{180-2\alpha}{2} = 90 - \alpha$.

$\angle ABH = 180° - \angle CBA = 180° - (180 - 2\alpha) = 2\alpha$

Т.к. $\triangle BAH$ – прямоугольный ($AH \perp BC$), то $\angle BAH = 90 - 2\alpha$.

$\angle KHA = 180 - 90 - (90 - 2\alpha) = 2\alpha$.

$\triangle BHA \sim \triangle KHA$ по трём углам.

Пусть $AB \cap HM = O$.

$\angle AOM = 180 - 90 - \alpha = 90 - \alpha$.
$\angle AOM = \angle KOH$ как вертикальные углы.

$\angle KHO = 180 - 90 - (90 - \alpha) = \alpha$.

$\angle KHO = \alpha$, $\angle KHA = 2\alpha$, тогда $\angle OHA = \alpha$.
Пусть $HK \cap AC = P$, тогда $\triangle AHP$ – равнобедренный, т.к. $HM \perp AP$, $\angle KHO = \angle OHA$.

$\angle HPA = \angle MAH = 90 - 2\alpha + \alpha = 90 - \alpha$.
$PM = MA$, т.к. HM – высота, медиана, биссектриса равнобедренного $\triangle AHP$.

$\triangle PKA$ – прямоугольный, т.к. $HK \perp AB$.
Около $\triangle PKA$ можно описать окружность, и из-за того, что $\triangle PKA$ – прямоугольный, её центр будет лежать в середине гипотенузы – точке M. AP будет её диаметром, PM, AM и MK – радиусами.
Получается, что $PM = AM = MK$, что и требовалось доказать.

б) Т.к. $BR \perp AC$ и $\triangle ABC$ – равнобедр., то $CR = RA = \frac{AC}{2} = \frac{8}{2} = 4$.

По теореме Пифагора:
$BR^2 = AB^2 - AR^2$
$BR^2 = 25 - 16 = 9$
$BR = \sqrt{9} = 3$.

$\triangle BRA$ подобен $\triangle KPA$ по трём углам ($\angle BRA = \angle AKP = 90°$; $\angle RBA = \angle APK = 90 - \alpha$; $\angle PAK = \angle RAB = \alpha$;)

$\triangle KPA$, в свою очередь, подобен $\triangle AOM$ по трём углам ($\angle AMO = \angle KP = 90$; $\angle PAK = \angle MAO = \alpha$; $\angle AOM = \angle APK = 90-\alpha$), соответственные стороны этих треугольников пропорциональны:

$\frac{AO}{AP} = \frac{AM}{AK} = \frac{OM}{KP}$, и так как $PM = AM$, $AP = 2AM$, коэффициент подобия $\triangle KPA$ и $\triangle AOM$ равен 2.

$\cos\alpha = \frac{AR}{AB} = \frac{4}{5} = 0{,}8$.

Рассмотрим $\triangle PKM$, он – равнобедренный ($PM = KM$), тогда $\angle KPM = \angle PKM = 90-\alpha$.
Тогда $\angle PMK = 180 - 2(90-\alpha) = 2\alpha$.

$\cos\angle KPM = \cos(90-\alpha) = \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \sin\alpha$.

$\sin\alpha = \frac{BR}{AR} = \frac{3}{5} = 0{,}6$.

Пусть $PM = AM = MK = x$
По теореме косинусов для $\triangle PKM$:

$PK^2 = PM^2 + MK^2 - 2\cdot PM\cdot MK\cdot\cos\angle KPM$
$PK^2 = 2x^2 - 2x^2\cdot\sin\alpha$

$PK^2 = 2x^2 - 1{,}2x^2 = 0{,}8x^2$
$PK = \sqrt{\frac{8}{10}x^2} = \frac{2x\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = 2x\sqrt{\frac{1}{5}} = \cancel{\frac{2x\sqrt{5}}{5}} = \frac{2x\sqrt{5}}{5}$

По теореме Пифагора для $\triangle APK$:

$AK^2 = AP^2 - PK^2$

$AK^2 = 4x^2 - 0{,}8x^2 = 3{,}2x^2$
$AK = x\sqrt{\frac{32}{10}} = 4x\sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{4x\sqrt{5}}{5}$

$\frac{AK}{PK} = \frac{\frac{4x\sqrt{5}}{5}}{\frac{2x\sqrt{5}}{5}} = 2$, ~~[illegible]~~

$BK = 5 - AK$

По теореме Пифагора для $\triangle BKP$:

$BP^2 = BK^2 + KP^2$
$16 - 16x + 4x^2 = BK^2 + KP^2$
$16 - 16x + 4x^2 = \frac{20x^2}{25} + \left(5 - \left(4x^2 + \frac{20x^2}{25}\right)\right)$

$16 - 16x + 4x^2 = \frac{20x^2}{25} + 5 - \frac{80x^2}{25}$
$16 - 16x + 4x^2 = \frac{125 - 60x^2}{25}$
$16 - 16x + 4x^2 = \frac{25 - 12x^2}{5}$
$80 - 80x + 20x^2 = 25 - 12x^2$
$8x^2 - 80x + 65 = 0$.
$D = 6400 - 2080 = 4320$
$\sqrt{4320} = 12\sqrt{30}$
$x = \frac{12\sqrt{30} + 80}{16} = \frac{3\sqrt{30}}{4} + 5 =$
$= \frac{3\sqrt{30} + 20}{4} = MK$;

Ответ: $\frac{3\sqrt{30}+20}{4}$;

Комментарий.

Доказательство утверждения пункта *а* верно. Правда, следует отметить, что в доказательстве получено много верных утверждений, которые не нужны для доказательства равенства отрезков AM и MK, кроме того, некорректно формулируется признак подобия треугольников.

В решении пункта *б* допущена ошибка при вычислении длины отрезка PK – вместо $\cos\angle KPM$ должно быть $\cos\angle KMP$.

Оценка эксперта: 1 балл.

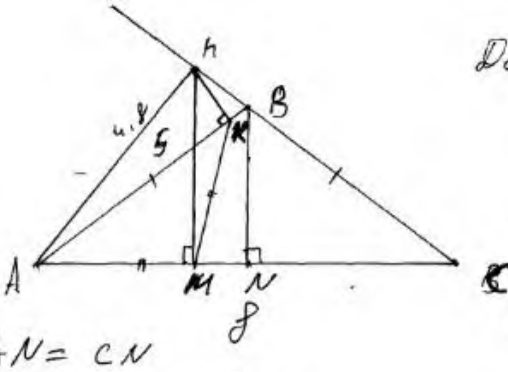
Пример 17.3.3

В равнобедренном тупоугольном треугольнике ABC на продолжение боковой стороны BC опущена высота AH. Из точки H на сторону AB и основание AC опущены перпендикуляры HK и HM соответственно.

а) Докажите, что отрезки AM и MK равны.

б) Найдите MK, если $AB = 5,\ AC = 8$.

Ответ: б) $\dfrac{72}{25}$.



Дано: $AB = BC$; $\triangle ABC$

$AB = 5$

$BC = 8$

$hK \perp AB$

$hM \perp AC$

$MK - ?$

$AN = CN$

$AM = \frac{1}{2} AC = \frac{8}{2} = 4$

$\cos A = 0.8 = \frac{AN}{AB} = \frac{4}{5}$

$\cos A = \cos C = 0{,}8$ в $\triangle ABC$

$\frac{hC}{AC} = \frac{4}{5}$

$\frac{hC}{8} = \frac{4}{5}$

$5hC = 32$ $\quad \frac{Ah}{AC} = \frac{3}{5}$ $\quad Ah = 4.8$

$hC = 6.4$

$\sin^2 C = 1 - \cos^2 C = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$

$\sin C = 0{,}6$

$\sin C = \cos A$ в $\triangle ACh$

$\frac{AM}{Ah} = 0{,}6$

$AM = 0.6 \cdot 4.8$

$AM = 2{,}88$

$AM = MK = 2{,}88$

Ответ: $MK = 2{,}88$

Комментарий.

Доказательство утверждения пункта *а* отсутствует. Решение пункта *б* выполнено верно с использованием недоказанного утверждения пункта *а*.

Оценка эксперта: 1 балл.

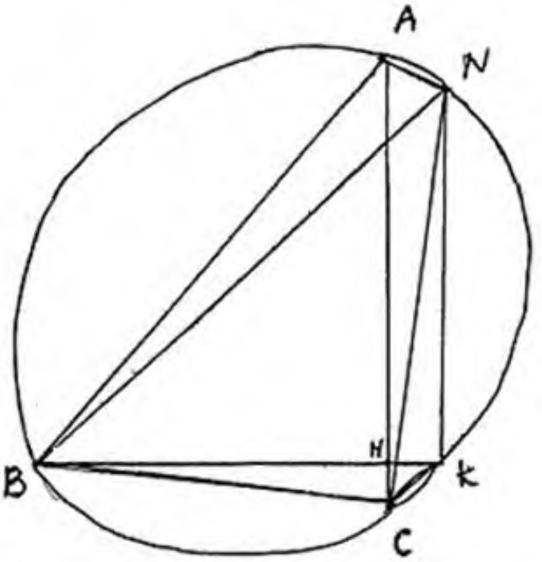
Пример 17.4.1

В остроугольном треугольнике ABC все стороны различны. Прямая, содержащая высоту BH треугольника ABC, вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке K. Отрезок BN – диаметр этой окружности.

а) Докажите, что $AN = CK$.

б) Найдите NK, если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен 16, $\angle BAC = 40°$, $\angle ACB = 85°$.

Ответ: б) $16\sqrt{2}$.



Дано:
$BH \perp AC$
BN – диаметр
а) Док-ть:
$AN = CK$
б) $R = 16$
$\angle BAC = 40°$
$\angle ACB = 85°$
Найти:
NK – ?

а) Док-во: $\angle BCN = 90°$, т.к. BH – диаметр, => $\angle BCH = 90 - \angle HBC$ => => $\angle HCN = \angle HBC$, $\angle HCN = \angle ABN$ (т.к. они опираются на одну дугу) => $\angle ABN = \angle HBC$ => $AN = CK$ (как хорды, стягивающие равные дуги).

Комментарий.

В доказательстве утверждения пункта *а* есть верное название прямого угла – «$\angle BCN = 90°$», при этом тут же записано противоречащее условию утверждение «BH – диаметр». Утверждение, записанное во второй строчке – «$\angle HCN = \angle ABN$ (т.к. они опираются на одну дугу)», – содержит неточность, поскольку точка H не лежит на окружности, а $\angle ACN = \angle ABN$ (так как они опираются на одну дугу). Решение пункта *б* отсутствует.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 17.4.2

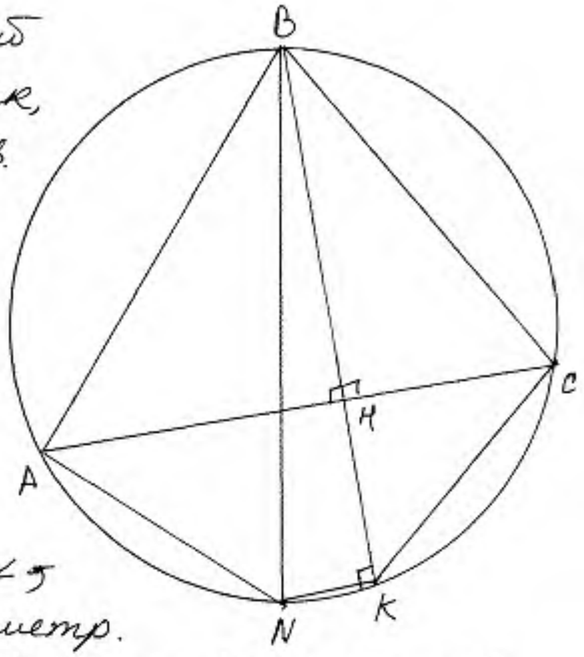
В остроугольном треугольнике ABC все стороны различны. Прямая, содержащая высоту BH треугольника ABC, вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке K. Отрезок BN – диаметр этой окружности.

а) Докажите, что $AN = CK$.

б) Найдите NK, если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен 16, $\angle BAC = 40°$, $\angle ACB = 85°$.

Ответ: б) $16\sqrt{2}$.

а) Пусть ABC – произвольный остроугольный треугольник, вписанный в окружность. BN – диаметр. BH – высота ΔABC, прямая BK содержит высоту BH и пересекает окр. в точке K. $\angle AHB = 90^0$ (т.к BH – высота) $\angle NKB$ – вписанный $\angle$, опирающийся на диаметр. $\Rightarrow \angle NKB = 90^0$. $\Rightarrow$ Прямая $AC \parallel$ прямой NK $\Rightarrow$ $ACKN$ – трапеция. По св-ву трапеции, вписанной в окружность ее стороны равны. $AN = CK$ ч.т.д.



Комментарий.

При выполнении пункта *а* используется недоказанное утверждение, что $ACKN$ – трапеция. В решении есть некорректное утверждение: «по свойству трапеции, вписанной в окружность, её стороны равны», при этом рядом записано верное равенство боковых сторон. Решение пункта *б* отсутствует.

Оценка эксперта: 1 балл.

6. Критерии проверки и оценка решений задания 18

Задание № 18 — это уравнение, неравенство или их системы с параметром.

Задачи с параметром допускают весьма разнообразные способы решения. Наиболее распространёнными из них являются:

– чисто алгебраический способ решения;
– способ решения, основанный на построении и исследовании геометрической модели данной задачи;
– функциональный способ, в котором могут быть и алгебраические, и геометрические элементы, но базовым является исследование некоторой функции.

Зачастую (но далеко не всегда) графический метод более ясно ведёт к цели. Кроме того, в конкретном тексте решения вполне могут встречаться элементы каждого из трёх перечисленных способов.

Задача 18 (демонстрационный вариант ЕГЭ 2024 г.)

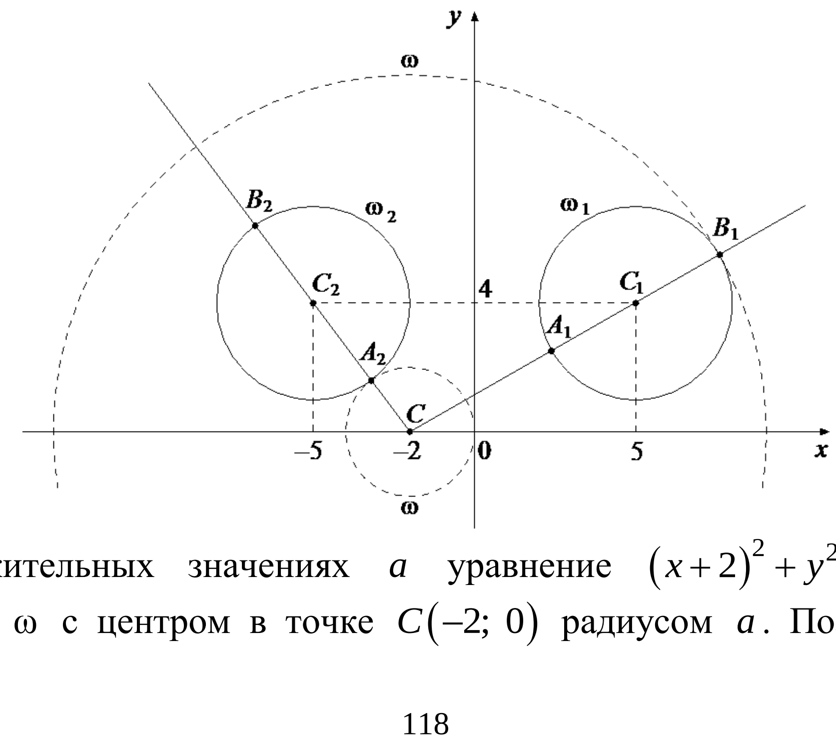
Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}(|x|-5)^2+(y-4)^2=9,\\ (x+2)^2+y^2=a^2\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Если $x\geq 0$, то уравнение $(|x|-5)^2+(y-4)^2=9$ задаёт окружность ω_1 с центром в точке $C_1(5;\ 4)$ радиусом 3, а если $x<0$, то оно задаёт окружность ω_2 с центром в точке $C_2(-5;\ 4)$ и таким же радиусом (см. рисунок).



При положительных значениях a уравнение $(x+2)^2+y^2=a^2$ задаёт окружность ω с центром в точке $C(-2;\ 0)$ радиусом a. Поэтому задача состоит в том, чтобы найти все значения a, при каждом из которых окружность ω имеет единственную общую точку с объединением окружностей ω_1 и ω_2.

Из точки C проведём луч CC_1 и обозначим через A_1 и B_1 точки его пересечения с окружностью ω_1, где A_1 лежит между C и C_1. Так как $CC_1=\sqrt{(5+2)^2+4^2}=\sqrt{65}$, то $CA_1=\sqrt{65}-3,\ CB_1=\sqrt{65}+3$.

При $a<CA_1$ или $a>CB_1$ окружности ω и ω_1 не пересекаются.

При $CA_1<a<CB_1$ окружности ω и ω_1 имеют две общие точки.

При $a=CA_1$ или $a=CB_1$ окружности ω и ω_1 касаются.

Из точки C проведём луч CC_2 и обозначим через A_2 и B_2 точки его пересечения с окружностью ω_2, где A_2 лежит между C и C_2. Так как $CC_2=\sqrt{(-5+2)^2+4^2}=5$, то $CA_2=5-3=2,\ CB_2=5+3=8$.

При $a<CA_2$ или $a>CB_2$ окружности ω и ω_2 не пересекаются.

При $CA_2<a<CB_2$ окружности ω и ω_2 имеют две общие точки.

При $a=CA_2$ или $a=CB_2$ окружности ω и ω_2 касаются.

Исходная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда окружность ω касается ровно одной из двух окружностей ω_1 и ω_2 и не пересекается с другой. Так как $CA_2<CA_1<CB_2<CB_1$, то условию задачи удовлетворяют только числа $a=2$ и $a=\sqrt{65}+3$.

Ответ: 2; $\sqrt{65}+3$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены оба верных значения параметра, но – или в ответ включены также и одно-два неверных значения; – или решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра	2
Задача сведена к исследованию: – или взаимного расположения трёх окружностей; – или двух квадратных уравнений с параметром	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

Задание 18.1

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}\left(x^2-5x-y+3\right)\cdot\sqrt{x-y+3}=0,\\ y=3x+a\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение.

Каждое решение уравнения $\left(x^2-5x-y+3\right)\cdot\sqrt{x-y+3}=0$ либо является решением уравнения $x-y+3=0$, откуда $y=x+3$, либо является решением системы:

$$\begin{cases}x^2-5x-y+3=0,\\ x-y+3\geq 0;\end{cases}\quad \begin{cases}y=x^2-5x+3,\\ y\leq x+3;\end{cases}\quad \begin{cases}y=x^2-5x+3,\\ x^2-5x+3\leq x+3;\end{cases}\quad \begin{cases}y=x^2-5x+3,\\ x^2-6x\leq 0,\end{cases}$$

откуда $y=x^2-5x+3$ при условии $0\leq x\leq 6$.

Для каждого из этих случаев подставим $y=3x+a$ и найдём количество корней получившегося уравнения в зависимости от a.

Первый случай: $3x+a=x+3$, откуда $x=\dfrac{3-a}{2}$.

Второй случай: $3x+a=x^2-5x+3$ при условии $0\leq x\leq 6$. Получаем квадратное уравнение $x^2-8x-a+3=0$. Дискриминант этого уравнения равен $64+4(a-3)=4(a+13)$. Значит, уравнение $x^2-8x-a+3=0$ имеет два корня при $a>-13$, имеет единственный корень $x=4$ при $a=-13$ и не имеет корней при $a<-13$.

При $a>-13$ функция $f(x)=x^2-8x-a+3$ принимает наименьшее значение при $x=4$, и это значение отрицательно. Следовательно, больший корень уравнения $f(x)=0$ удовлетворяет условию $0\leq x\leq 6$ тогда и только тогда, когда $f(6)\geq 0$; $-a-9\geq 0$, откуда $a\leq -9$.

Аналогично меньший корень уравнения $f(x)=0$ удовлетворяет условию $0\leq x\leq 6$ тогда и только тогда, когда $f(0)\geq 0$; $-a+3\geq 0$, откуда $a\leq 3$.

Число $\dfrac{3-a}{2}$ является корнем квадратного уравнения $f(x)=0$ при $\left(\dfrac{3-a}{2}\right)^2-4(3-a)-a+3=0$, откуда

$$\left(\frac{a-3}{2}\right)^2+3(a-3)=0;\ (a-3)(a+9)=0,$$

то есть при $a=3$ и при $a=-9$.

Таким образом, исходная система уравнений имеет ровно два различных решения при $a=-13$; $-9\le a<3$.

Ответ: $a=-13$; $-9\le a<3$.

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только исключением / включением точек $a=-9$ и / или $a=3$	3
С помощью верного рассуждения получен промежуток $\left(-9;3\right)$ множества значений a, возможно, с включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения параболы и прямых (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

Задание 18.2

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{3x^2+2ax+1}=x^2+ax+1$$

имеет ровно три различных корня.

Решение. Исходное уравнение равносильно уравнению $3x^2+2ax+1=\left(x^2+ax+1\right)^2$ при условии $x^2+ax+1\geq 0$.

Решим уравнение $3x^2+2ax+1=\left(x^2+ax+1\right)^2$:

$$3x^2+2ax+1=x^4+2ax^3+\left(a^2+2\right)x^2+2ax+1;\ x^4+2ax^3+\left(a^2-1\right)x^2=0;$$

$$x^2\left(x+a+1\right)\left(x+a-1\right)=0,\text{ откуда } x=0,\ x=1-a \text{ или } x=-1-a.$$

Исходное уравнение имеет три корня, когда эти числа различны и для каждого из них выполнено условие $x^2+ax+1\geq 0$.

Рассмотрим условия совпадения корней. При $a=1$ имеем $1-a=0$. При $a=-1$ имеем $-1-a=0$. При остальных значениях a числа 0, $1-a$, $-1-a$ различны.

При $x=0$ получаем: $x^2+ax+1=1\geq 0$ при всех значениях a.

При $x=1-a$ получаем: $x^2+ax+1=(1-a)^2+a(1-a)+1=2-a$.

Это выражение неотрицательно при $a\leq 2$.

При $x=-1-a$ получаем: $x^2+ax+1=(-1-a)^2+a(-1-a)+1=a+2$.

Это выражение неотрицательно при $a\geq -2$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно три различных корня при

$$-2\leq a<-1;\ -1<a<1;\ 1<a\leq 2.$$

Ответ: $-2\leq a<-1;\ -1<a<1;\ 1<a\leq 2$.

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только исключением точек a = –2 и/или a = 2	3
С помощью верного рассуждения получен промежуток (–2; 2) множества значений a, возможно, с включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Получены корни уравнения $3x^2+2ax+1=\left(x^2+ax+1\right)^2$: $x=0$, $x=1-a$, $x=-1-a$ и задача верно сведена к исследованию полученных корней при условии $x^2+ax+1>0$ ($x^2+ax+1\geq 0$)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

Задание 18.3

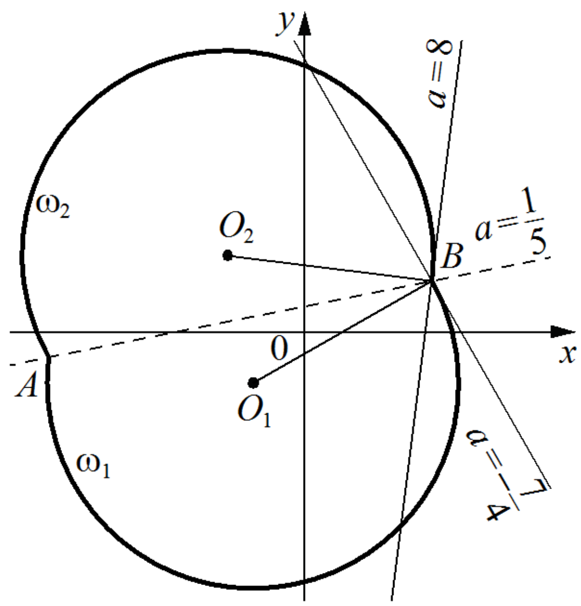
Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+5x+y^2-y-|x-5y+5|=52, \\ y-2=a(x-5) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Решение.

Изобразим на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют первому уравнению системы.



Рассмотрим два случая:

1) Если $x-5y+5\geq 0$, то получаем уравнение

$$x^2+5x+y^2-y-x+5y-5=52;$$

$$x^2+4x+y^2+4y-57=0;$$

$$(x+2)^2+(y+2)^2=65.$$

Полученное уравнение задаёт окружность с центром в точке $O_1(-2;-2)$ и радиусом $\sqrt{65}$.

2) Если $x-5y+5\leq 0$, то получаем уравнение

$x^2+5x+y^2-y+x-5y+5=52$; $x^2+6x+y^2-6y-47=0$; $(x+3)^2+(y-3)^2=65$.

Полученное уравнение задаёт окружность с центром в точке $O_2(-3;3)$ и радиусом $\sqrt{65}$.

Полученные окружности пересекаются в двух точках $A(-10;-1)$ и $B(5;2)$, лежащих на прямой $x-5y+5=0$, поэтому в первом случае получаем дугу ω_1 с концами в точках A и B, во втором – дугу ω_2 с концами в тех же точках (см. рисунок).

Рассмотрим второе уравнение системы. Оно задаёт прямую m, которая проходит через точку B, и угловой коэффициент которой равен a.

При $a=\frac{1}{5}$ прямая m проходит через точки A и B, то есть исходная система имеет два решения.

При $a=-\frac{7}{4}$ прямая m перпендикулярна прямой O_1B, угловой коэффициент которой равен $\frac{4}{7}$, значит, прямая m касается дуги ω_1 в точке B и пересекает дугу ω_2 в двух точках (одна из которых – точка B), то есть исходная система имеет два решения.

При $a=8$ прямая m перпендикулярна прямой O_2B, угловой коэффициент которой равен $-\frac{1}{8}$, значит, прямая m касается дуги ω_2 в точке B и пересекает дугу ω_1 в двух точках (одна из которых – точка B), то есть исходная система имеет два решения.

При $a<-\frac{7}{4}$ или $a>8$ прямая m пересекает каждую из дуг ω_1 и ω_2 в точке B и ещё в одной точке, отличной от точки A, то есть исходная система имеет три решения.

При $-\frac{7}{4}<a<\frac{1}{5}$ прямая m пересекает дугу ω_2 в двух точках (одна из которых – точка B) и не пересекает дугу ω_1 в точках, отличных от точки B, то есть исходная система имеет два решения.

При $\frac{1}{5}<a<8$ прямая m пересекает дугу ω_1 в двух точках (одна из которых – точка B) и не пересекает дугу ω_2 в точках, отличных от точки B, то есть исходная система имеет два решения.

Значит, исходная система имеет ровно два решения при $-\frac{7}{4}\le a\le 8$.

Ответ: $-\frac{7}{4}\le a\le 8$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только исключением точек $a=-\frac{7}{4}$ и/или $a=8$	3
При всех значениях a верно найдено количество решений системы в одном из двух случаев, возникающих при раскрытии модуля ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения дуг окружностей и прямых (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

Задание 18.4

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{|3x|-2x-2-a}{x^2-2x-a}=0$$

имеет ровно два различных корня.

Решение.

Корнями исходного уравнения являются корни уравнения $|3x|-2x-2-a=0$, для которых выполнено условие $x^2-2x-a\neq 0$.

При $x\leq 0$ уравнение $|3x|-2x-2-a=0$ принимает вид $-5x-2-a=0$ и задаёт на плоскости Oxa луч l_1 с началом в точке $(0;-2)$. При $x\geq 0$ уравнение $|3x|-2x-2-a=0$ принимает вид $x-2-a=0$ и задаёт луч l_2 с началом в точке $(0;-2)$. Значит, уравнение $|3x|-2x-2-a=0$ имеет два корня при $a>-2$, имеет один корень при $a=-2$ и не имеет корней при $a<-2$.

Уравнение $x^2-2x-a=0$ задаёт параболу $a=x^2-2x$.

Координаты точек пересечения параболы $a=x^2-2x$ с лучом l_1 являются решениями системы:

$$\begin{cases} a=x^2-2x, \\ a=-5x-2, \\ x\leq 0; \end{cases} \begin{cases} -5x-2=x^2-2x, \\ a=-5x-2, \\ x\leq 0; \end{cases} \begin{cases} (x+1)(x+2)=0, \\ a=-5x-2, \\ x\leq 0. \end{cases}$$

Значит, парабола $a=x^2-2x$ пересекается с лучом l_1 в точках $(-1;3)$ и $(-2;8)$.

Координаты точек пересечения параболы $a=x^2-2x$ с лучом l_2 являются решениями системы:

$$\begin{cases} a=x^2-2x, \\ a=x-2, \\ x\geq 0; \end{cases} \begin{cases} x-2=x^2-2x, \\ a=x-2, \\ x\geq 0; \end{cases} \begin{cases} (x-1)(x-2)=0, \\ a=x-2, \\ x\geq 0. \end{cases}$$

Значит, парабола $a=x^2-2x$ пересекается с лучом l_2 в точках $(1;-1)$ и $(2;0)$.

Следовательно, условие $x^2-2x-a\neq 0$ выполнено для корней уравнения $|3x|-2x-2-a=0$ при всех a, кроме $a=-1$, $a=0$, $a=3$ и $a=8$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два корня при $-2<a<-1$; $-1<a<0$; $0<a<3$; $3<a<8$; $a>8$.

Ответ: $-2<a<-1$; $-1<a<0$; $0<a<3$; $3<a<8$; $a>8$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы

Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точки $a=-2$	3
Верно рассмотрен хотя бы один из случаев решения, и получено или множество значений a, отличающееся от искомого только включением точек $a=8$, $a=3$ и/или $a=-2$, или множество значений a, отличающееся от искомого только включением точек $a=0$, $a=-1$ и/или $a=-2$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения параболы и лучей (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

Примеры оценивания решений задания 18

Пример 18.1.1

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}\left(x^2-5x-y+3\right)\cdot\sqrt{x-y+3}=0,\\ y=3x+a\end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

Ответ: $a=-13$; $-9\le a<3$.

№ 18.

$\begin{cases}(x^2-5x-y+3)\sqrt{x-y+3}=0,\\ y=3x+a\end{cases}$ $\boxed{\text{ровно 2 реш.}}$

Решим задачу геометрически.

Рассмотрим первое уравнение системы. Оно имеет смысл при $x-y+3\ge 0 \iff \underline{y\le x+3}$.

Тогда имеем: $x^2-5x-y+3=0$ или $\sqrt{x-y+3}=0$

$y=x^2-5x+3$ – парабола, ветви вверх.

$x-y+3=0$

$\underline{y=x+3}$

– прямая

x	0	1
y	3	4

$x_0=\frac{5}{2}=2{,}5$

$y_0=2{,}5^2-5\cdot 2{,}5+3=6{,}25-12{,}5+3=-3{,}25$

Вершина параболы – $(2{,}5;-3{,}25)$

x	0	1	2	2,5	3	4	5
y	3	−1	−3	−3,25	−3	−1	3

$x=2 \Rightarrow y=2^2-5\cdot 2+3=4-10+3=-3$

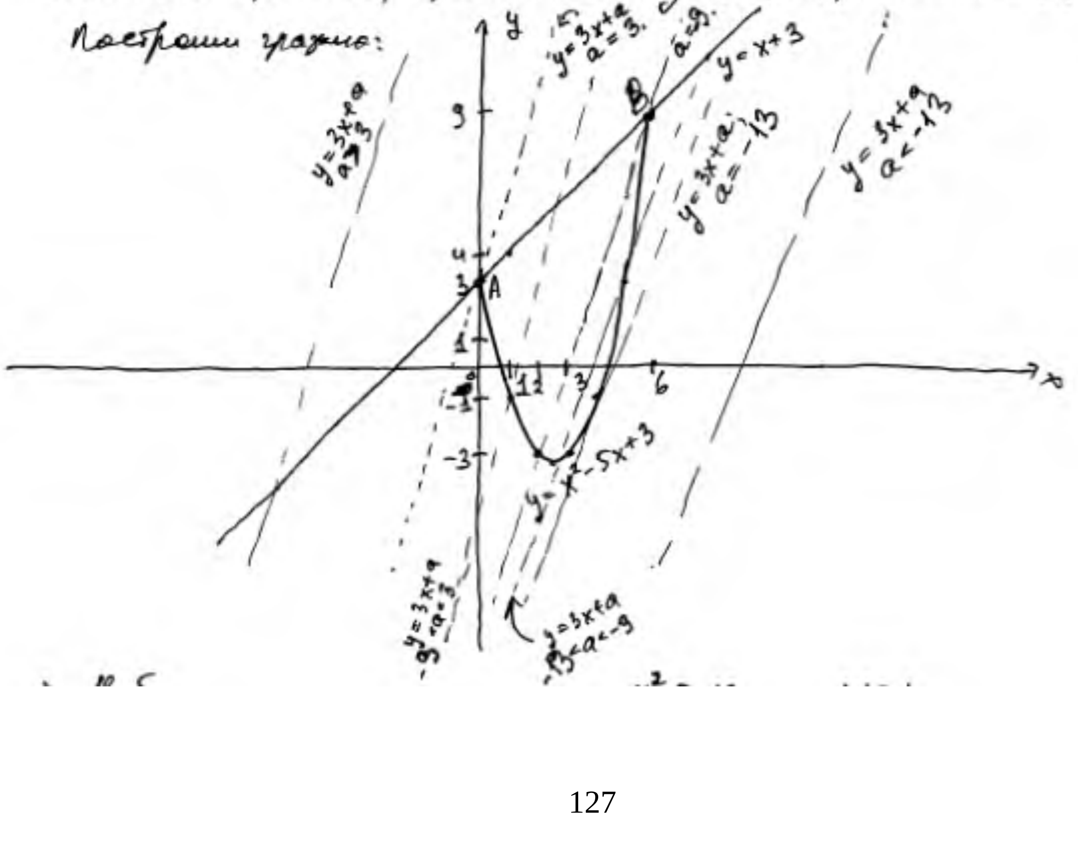
$x=1 \Rightarrow y=1^2-5\cdot 1+3=1-5+3=-1$

$x=0 \Rightarrow y=0^2-5\cdot 0+3=3$

Отметим, что $y\le x+3$ задает полуплоскость под прямой $y=x+3$

Рассмотрим 2-е ур. системы: $y=3x+a$. Оно задает семейство прямых, параллельных $y=3x$. Коэф. наклона $=3$.

Построим график:



1) Найдем коорд. пересечения $y=x^2-5x+3$ и $y=x+3$:

$$x^2-5x+\underline{3}=x+\underline{3}$$
$$x^2-6x=0$$
$$x(x-6)=0$$
$$x=0 \text{ или } x=6$$

При $x=0$, $y=0+3=3$

При $x=6$, $y=6+3=9$

Пусть: $A(0;3)$, $B(6;9)$

2) Найдем, при каком a график $y=3x+a$ проходит через т. $A(0;3)$:

$\cancel{3=3a+3 \Leftrightarrow a=3}$ $\quad 3=3\cdot 0+a \rightarrow \underline{a=3}$

3) Найдем, при каком a график $y=3x+a$ проходит через т. $B(6;9)$:

$$9=3\cdot 6+a \rightarrow \underline{a=-9}$$

4) Найдем, при каком a график $y=3x+a$ будет касательной к параболе $y=x^2-5x+3$

$$3x+a=x^2-5x+3$$
$$x^2-8x+(3-a)=0$$
$$D=64-4(3-a)=64-12+4a=52+4a$$

Т.к. $y=3x+a$ касается параболу, то пересечение ровно в 1 точке $\Rightarrow D=0$

$$52+4a=0$$
$$4a=-52$$
$$\underline{a=-13}$$

Рассмотрим, сколько корней имеет исходная система в зависимости от a:

$a<-13 \rightarrow 1$к. (пересек. $y=x+3$)

$a=-13 \rightarrow 2$к. (пересеч. $y=x+3$ и касан. $y=x^2-5x+3$)

$-13<a<-9 \rightarrow 3$к (пересеч. $y=x+3$ и 2 пересеч. с $y=x^2-5x+3$)

$a=-9 \rightarrow 2$к (пересеч. $y=x+3$ и 2 пересеч. с $y=x^2-5x+3$, но 2 из них совпадают в т. A)

$-9<a<3 \rightarrow 2$к. (пересеч. с $y=x+3$ и 1 пересеч. с $y=x^2-5x+3$)

$a=3 \rightarrow 1$к. (пересеч. с $y=x+3$ и 1 пересеч. с $y=x^2-5x+3$, но совпадают в т. B).

$a>3 \rightarrow 1$к. (пересеч. с $y=x+3$).

Система имеет ровно 2 реш., при $a\in\{-13\}\cup[-9;3)$.

Ответ: $a\in\{-13\}\cup[-9;3)$.

Комментарий.

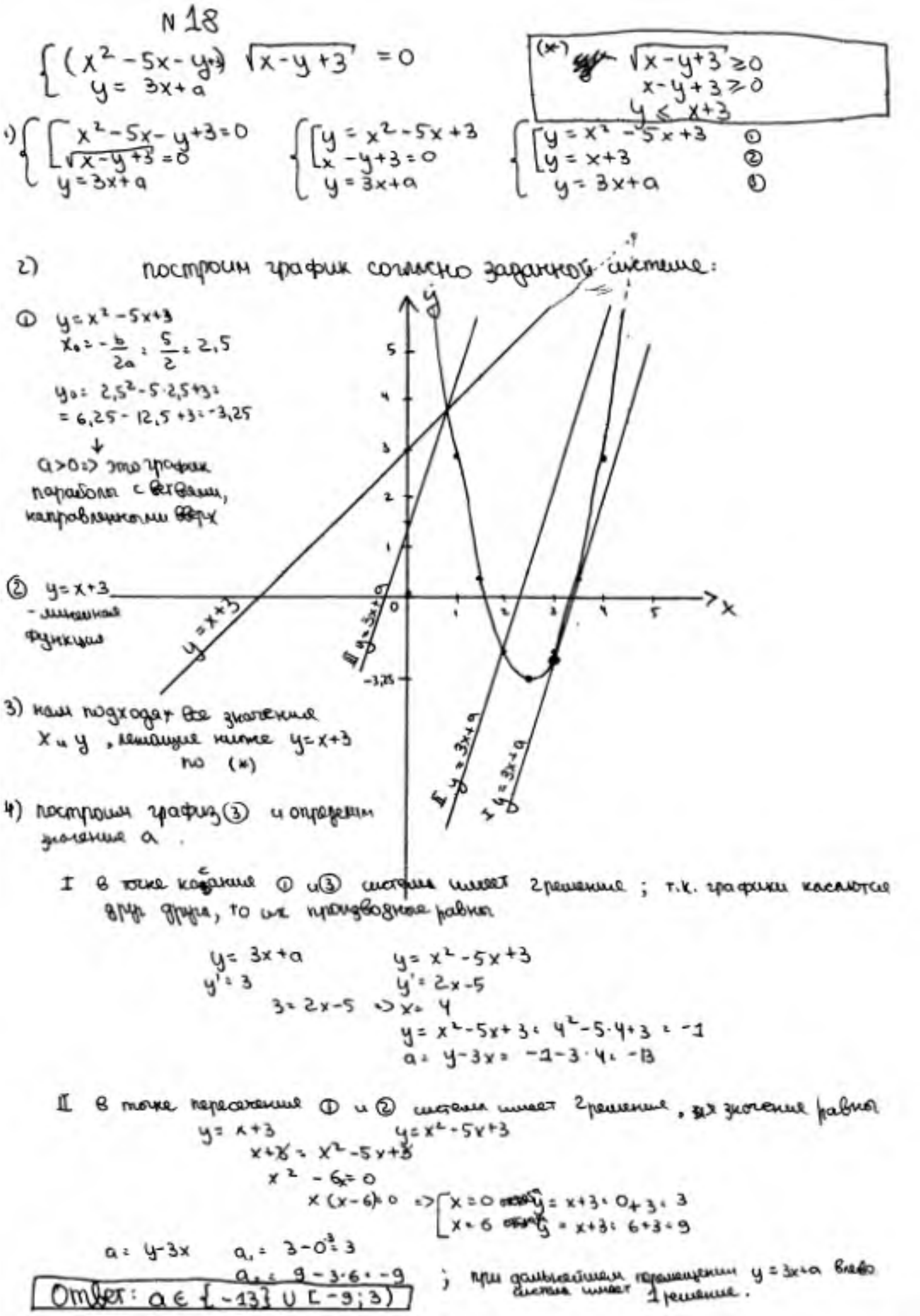
Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 4 балла.

Пример 18.1.2

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}\left(x^2-5x-y+3\right)\cdot\sqrt{x-y+3}=0,\\ y=3x+a\end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

Ответ: $a=-13$; $-9\le a<3$.



N 18

$\begin{cases}(x^2-5x-y+3)\sqrt{x-y+3}=0\\ y=3x+a\end{cases}$

(*) $\sqrt{x-y+3}\ge 0$; $x-y+3\ge 0$; $y\le x+3$

1) $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x^2-5x-y+3=0\\ \sqrt{x-y+3}=0\end{array}\right.\\ y=3x+a\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=x^2-5x+3\\ x-y+3=0\end{array}\right.\\ y=3x+a\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=x^2-5x+3 \quad ①\\ y=x+3 \quad ②\end{array}\right.\\ y=3x+a \quad ③\end{cases}$

2) построим график согласно заданной системе:

① $y=x^2-5x+3$

$x_0=-\frac{b}{2a}=\frac{5}{2}=2{,}5$

$y_0=2{,}5^2-5\cdot 2{,}5+3=$
$=6{,}25-12{,}5+3=-3{,}25$

$a>0\Rightarrow$ это график парабола с ветвями, направленными вверх

② $y=x+3$ – линейная функция

3) нам подходят все значения x и y, лежащие ниже $y=x+3$ по (*)

4) построим график ③ и определим значения a.

I в точке касания ① и ③ система имеет 2 решения; т.к. графики касаются друг друга, то их производные равны

$y=3x+a$ $\qquad$ $y=x^2-5x+3$
$y'=3$ $\qquad$ $y'=2x-5$
$3=2x-5\Rightarrow x=4$
$y=x^2-5x+3=4^2-5\cdot 4+3=-1$
$a=y-3x=-1-3\cdot 4=-13$

II в точке пересечения ① и ② система имеет 2 решения, эти значения равны
$y=x+3$ $\qquad$ $y=x^2-5x+3$
$x+3=x^2-5x+3$
$x^2-6x=0$
$x(x-6)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0 \quad y=x+3=0+3=3\\ x=6 \quad y=x+3=6+3=9\end{array}\right.$

$a=y-3x$ $\qquad$ $a_1=3-0=3$
$a_2=9-3\cdot 6=-9$; при дальнейшем перемещении $y=3x+a$ влево система имеет 1 решение.

$\boxed{\text{Ответ: } a\in\{-13\}\cup[-9;3)}$

Комментарий.

Решение не является обоснованным, но получен промежуток $[-9;3)$.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 18.1.3

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} \left(x^2-5x-y+3\right)\cdot\sqrt{x-y+3}=0, \\ y=3x+a \end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

Ответ: $a=-13$; $-9\le a<3$.

$\begin{cases} (x^2-5x-y+3)\sqrt{x-y+3}=0 \\ y=3x+a \end{cases}$ №18. 2 реш. a − ?

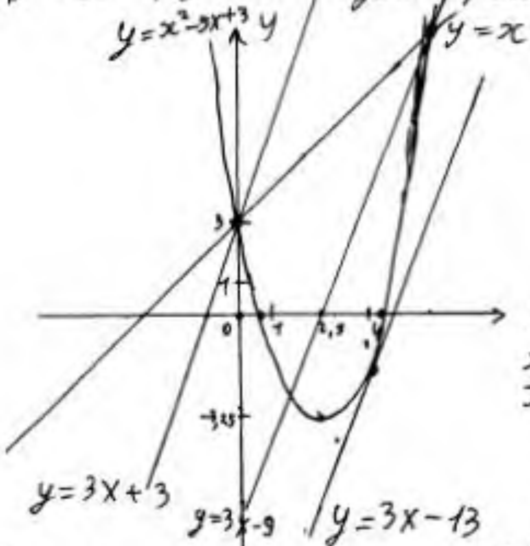
$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-5x-y+3=0 \\ x-y+3\geqslant 0 \end{cases} \\ x-y+3=0 \end{array}\right. \\ y=3x+a \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=x^2-5x+3 \\ y\leqslant x+3 \end{cases} \\ y=x+3 \end{array}\right. \\ y=3x+a \end{cases}$

Решим систему графически: $y=x^2-5x+3$ − парабола

$y=x+3$ − прямая, $y=3x+a$ − семейство прямых с угловым коэфф. 3.

$D=25-4\cdot 3=13$ Нули параболы: $\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$. $3<\sqrt{13}<4$ $4<\frac{5+\sqrt{13}}{2}<4,5$ $x_в=2,5$

$0,5<\frac{5-\sqrt{13}}{2}<1$ $y_в=-3,25$



Т. пересеч. параболы и $y=x+3$:

$x^2-5x+3=x+3$

$x^2-6x=0$

$\left[\begin{array}{ll} x=0 & (y=3) \\ x=6 & (y=9) \end{array}\right.$

Прямая $y=3x+a$ касается параболы в случае $D_1=0$.

$x^2-5x+3=3x+a$

$x^2-8x+3-a=0$

$D_1=16+a-3=13+a=0$ $a=-13$

Прямая $y=3x+a$ ~~может~~ имеет 2 точки пересечения с параболой при $a>-13$, 1 − при $a=-13$ и 0 − при $a<-13$

С прямой $y=x+3$ прямая $y=3x+a$ всегда имеет 1т. пересечения

$y=3x+a$ проходит через $(0;3)$ при $3=0+a$, $a=3$.

через $(6;9)$ при $9=6\cdot 3+a$ $a=-9$

При $a>3$, 3 точки пересеч. При $a=3$, 2т. пересечения.

При $-9<a<3$, 3 точки пересечения. При $a=-9$, 2т. пересечения

При $-13<a<-9$, 3 точки пересечения. При $a=-13$, 2т. пересечения.

При $a<-13$ 1 точка пересечения.

Ответ: 3; −9; −13.

Комментарий.

Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения параболы и прямых (аналитически или графически).

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 18.2.1

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{3x^2+2ax+1}=x^2+ax+1$ имеет ровно три различных корня.

Ответ: $-2\le a<-1;\ -1<a<1;\ 1<a\le 2$.

$$\sqrt{3x^2+2ax+1}=x^2+ax+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+ax+1\ge 0 \\ 3x^2+2ax+1=(x^2+ax+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+ax+1\ge 0 \\ 3x^2+2ax+1=x^4+2ax^3+x^2(2+a^2)+2ax+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+ax+1\ge 0 \\ x^2(x^2+2ax+2+a^2-3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+ax+1\ge 0 \\ x^2(x^2+2ax+a^2-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+ax+1\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+2ax+a^2-1=0 \end{array}\right. \end{cases} \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \begin{cases} x^2+ax+1\ge 0 & (2) \\ x^2+2ax+a^2-1=0 & (1) \end{cases} \end{array}\right.$$

Для того чтобы система имела 3 различных решения, необходимо, чтобы (1) имело 2 различных решения не равных 0 и удовлетворяющих (2), пусть $g(x)=x^2+2ax+a^2-1$, $f(x)=x^2+ax+1$; $g(0)=0 \Rightarrow a^2-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=-1 \end{array}\right. \Rightarrow a=1$ и $a=-1$ не подходят

Заметим, что (1) $\Leftrightarrow x^2+2ax+a^2-1=0 \Leftrightarrow (x+a)^2-1=0 \Leftrightarrow (x+a-1)(x+a+1)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1-a \\ x=-1-a \end{array}\right.;\ \text{тогда } (*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \begin{cases} x^2+ax+1\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=1-a \\ x=-1-a \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \begin{cases} 1-2a+a^2+a-a^2+1\ge 0 \\ x=1-a \end{cases} \\ \begin{cases} 1+2a+a^2-a-a^2+1\ge 0 \\ x=-1-a \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ (4)\begin{cases} a\le 2 \\ x=1-a \end{cases} \\ (3)\begin{cases} a\ge -2 \\ x=-1-a \end{cases} \end{array}\right.$$

три различных решения система имеет тттк ~~(3) и (4) имеют~~ (3) и (4) имеют различные, не равные нулю решения; Найдём, при каких a совпадают корни 3 и 4:

$1-a=-1-a \Leftrightarrow 1=-1 \Rightarrow$ таких a не существует. (3) имеет реш. равное 0 при $a=-1$ – не подход. (4) имеет реш. $=0$ при $a=1$ – не подход.

(3) имеет реш. при $a\ge -2$; (4) имеет реш. при $a\le 2 \Rightarrow$ (3) и (4) имеют различные реш., отлич. от 0 при $a\in[-2;2]$ и $a\ne \pm 1$

Ответ: $a\in[-2;-1)\cup(-1;1)\cup(1;2]$

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 4 балла.

Пример 18.2.2

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{3x^2+2ax+1}=x^2+ax+1$ имеет ровно три различных корня.

Ответ: $-2\le a<-1$; $-1<a<1$; $1<a\le 2$.

$\sqrt{3x^2+2ax+1}=x^2+ax+1$

a; 3 различных корня

① $x^2+ax+1<0$

нет решений

② $x^2+ax+1=0$ (1)

тогда $3x^2+2ax+1=0$ (2)

возможны ситуации:

$\begin{cases}\text{(1) имеет 2 различных корня}\\ \text{(2) имеет 1 корень}\end{cases}$

$\begin{cases}\text{(1) имеет 1 корень}\\ \text{(2) имеет 2 различных корня}\end{cases}$

(1) $x^2+ax+1=0$

$D>0$ $\quad a^2-4>0$

$(a-2)(a+2)>0$

(2) $3x^2+2ax+1=0$

$D/4=a^2-3=0$

$a^2=3$

$a=\pm\sqrt{3}$

$-2 \quad -\sqrt{3} \quad \sqrt{3} \quad 2 \quad a$

при $a=\pm\sqrt{3}$ D в (1) не >0 $\Rightarrow$ $a\ne\pm\sqrt{3}$

(1) $x^2+ax+1=0$

$D=0$ $\quad a^2-4=0$

$a=\pm 2$

$x_3=\frac{-a}{2}$

(2) $3x^2+2ax+1=0$

$D/4=a^2-3>0$

$(a-\sqrt{3})(a+\sqrt{3})>0$ при $a=2$

$-2 \quad -\sqrt{3} \quad \sqrt{3} \quad 2$

$a=\pm 2$ проверим

$x_{1,2}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-3}}{3}$

$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-3}}{3}=\frac{-2\pm1}{3}$ корни различные

$x_1=-1$, $x_2=-\frac{1}{3}$, $x_3=-1$, $x_1=x_3$, $a=2$ не подходит

аналогично при $a=-2$

при $a=-2$

$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-3}}{3}$ $\quad x_{1,2}=\frac{2\pm1}{3}$ $\quad x_1=1$, $x_2=\frac{1}{3}$

$x_3=1$ $\quad x_1=x_3$ $\quad a=-2$ не подх.

③ $x^2+ax+1>0$

$3x^2+2ax+1=x^4+a^2x^2+1+2ax^3+2x^2+2ax$

из ② $\boxed{a\ne\pm 2}$

см. продолжение

продолжение

должно выполняться
$x^2+ax+1>0$ (*) нер-во со звёздочкой

③ $x^4+a^2x^2-x^2+2ax^3=0$

$x^2(x^2+a^2-1+2ax)=0$

$\boxed{x_3=0}$ – корень, который ур-е будет иметь независимо от параметра a

$x^2+2ax+a^2-1=0$

должно иметь 2 различных решения, тогда ур-е будет иметь 3 корня

$D/4=a^2-(a^2-1)>0$

$a^2-a^2+1>0$ верно для любого a

(корни не должны совпадать и не должны равняться x_3)

$x_{1,2}=\dfrac{-a\pm1}{1}$

$x_1=-a+1 \quad x_2=-a-1$

$x_1\neq x_2 \quad -a+1\neq-a-1$

$1\neq-1$ верно для любого a

$x_1\neq x_3$

$-a+1\neq0 \qquad -a-1\neq0$

$\boxed{a\neq1} \qquad \boxed{a\neq-1}$

(*): $x_1=-a+1$ должны выполняться оба нер-ва (и при x_1 и при x_2) $x_2=-a-1$

$(-a+1)^2+a(-a+1)+1>0 \qquad (-a-1)^2+a(-a-1)+1>0$

$(1-a)^2-a^2+a+1>0 \qquad (a+1)^2-a^2-a+1>0$

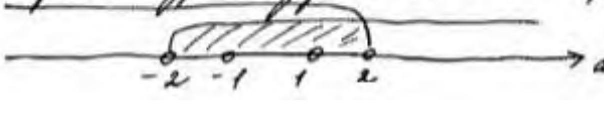
$1-2a+a^2-a^2+a+1>0 \qquad a^2+2a+1-a^2-a+1>0$

$2-a>0 \qquad a+2>0$

$\boxed{a<2} \qquad a>-2$

3 корня ур-е будет иметь при a:

$a\in(-2;-1)\cup(-1;1)\cup(1;2)$



Ответ: $(-2;-1)\cup(-1;1)\cup(1;2)$

Комментарий.

В решении присутствуют все этапы. Решение соответствует критерию на 3 балла: с помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только исключением точек $a=-2$ и/или $a=2$.

Оценка эксперта: 3 балла.

Пример 18.2.3

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{3x^2+2ax+1}=x^2+ax+1$ имеет ровно три различных корня.

Ответ: $-2 \le a < -1$; $-1 < a < 1$; $1 < a \le 2$.

$\sqrt{3x^2+2ax+1}=x^2+ax+1$

$$\begin{cases} x^2+ax+1 \geq 0 \\ 3x^2+2ax+1 = x^4+a^2x^2+1+2x^2+2ax^3+2ax \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+ax+1 \geq 0 \\ x^4+a^2x^2-x^2+2ax^3=0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+ax+1 \geq 0 \\ x^2(x^2+a^2-1+2ax)=0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+ax+1 \geq 0. \\ \left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ x^2+2ax+a^2-1=0; \end{array} \right. \end{cases}$$

Уравнение имеет решение, когда $x^2+2ax+a^2-1=0$ имеет 2 корня и они удовлетворяют неравенству $x^2+ax+1 \geq 0$.

$x^2+2ax+a^2-1=0$

$(x+a)^2-1=0$

$(x+a-1)(x+a+1)=0.$

$\left[\begin{array}{l} x=-a+1 \\ x=-a-1 \end{array} \right.$ Подставим x в $x^2+ax+1 \geq 0.$

1) $(-a+1)^2+a(-a+1)+1 \geq 0.$
$a^2-2a+1-a^2+a+1 \geq 0.$
$-a+2 \geq 0$ $\quad a \leq 2$
$a \in [-1; 2].$

2) $(-a-1)^2+a(-a-1)+1 \geq 0$
$a^2+2a+1-a^2-a+1 \geq 0$
$2a+2 \geq 0$
$a \geq -1.$

Найдем значение x, когда они совпадают:

3 случая

1) $-a+1=-a-1$ $\qquad$ 1) нет решений
2) $0=-a+1$ $\qquad$ 2) $a=1$
3) $0=-a-1$ $\qquad$ 3) $a=-1.$

$\}$ – выкалываем эти точки

$a \in (-1; 1) \cup (1; 2].$

при $a \in$

Ответ: $(-1; 1) \cup (1; 2]$. уравнение имеет 3 разл. корня.

Комментарий.

Решение логично, все шаги присутствуют, но при решении неравенства в пункте 2 допущена ошибка вычислительного характера, что соответствует критерию на 2 балла.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 18.2.4

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{3x^2+2ax+1}=x^2+ax+1$ имеет ровно три различных корня.

Ответ: $-2\le a<-1$; $-1<a<1$; $1<a\le 2$.

$\sqrt{3x^2+2ax+1} = x^2+ax+1$ (1); a - ? ур-е имеет 3 различных корня

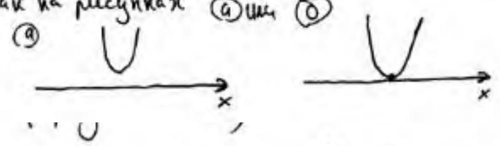
1) О.Д.З: $x^2+ax+1\geqslant 0$

$x^2+ax+1=0$; $x^2+ax+1\geqslant 0$, если $D\leqslant 0$, так как тогда парабола будет располагаться так, как на рисунках (а) или (б)

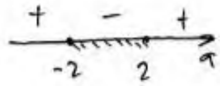
$D=a^2-4$

ветви направлены вверх так как коэф. при x^2 равен $1>0$

(а) (б)



$D\leqslant 0 \Rightarrow a^2-4\leqslant 0$; $(a-2)(a+2)\leqslant 0$



$\Rightarrow a\in[-2;2]$ (*)

2) ~~при~~ при $a\in[-2;2]$ возведём обе части уравнения в квадрат, тогда

$3x^2+2ax+1 = (x^2+ax+1)^2$

$3x^2+2ax+1 = (x^2+ax)^2+2(x^2+ax)+1$

$3x^2+\cancel{2ax}+\cancel{1} = x^4+2ax^3+a^2x^2+2x^2+\cancel{2ax}+\cancel{1}$

$x^4+2ax^3+(a^2+2-3)x^2=0$

$x^2\cdot(x^2+2ax+a^2-1)=0$

$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+2ax+a^2-1=0 \end{array}\right.$

Чтобы уравнение имело ровно 3 различных корня нужно, чтобы $x^2+2ax+a^2-1=0$ имело ровно 2 корня, отличные от друг друга

$x^2+2ax+a^2-1=0$ (**)

$\frac{D}{4}=a^2-a^2+1=1 \Rightarrow x_{1,2}=-a\pm 1$

$x_1\neq x_2$, т.к $\cancel{-a}+1=\cancel{-a}-1 \Rightarrow 1=-1$ - не верно

$\Rightarrow$ уравнение (**) имеет 2 различных корня при $\forall a$ из ОДЗ

$\Rightarrow$ уравнение (1) имеет 3 различных корня при $\forall a$ из ОДЗ, то есть $a\in[-2;2]$

Ответ: $a\in[-2;2]$

Комментарий.

Получены корни уравнения $x=0$, $x=1-a$, $x=-1-a$ и задача сведена к исследованию полученных корней при условии $x^2+ax+1\ge 0$ (есть только указание).

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 18.3.1

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+5x+y^2-y-|x+5y+5|=52, \\ y-2=a(x-5) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Ответ: $-8 \le a \le \dfrac{7}{4}$.

$$\begin{cases} x^2+5x+y^2+y-|x+5y+5|=52 \\ y+2=a(x-5) \end{cases}$$

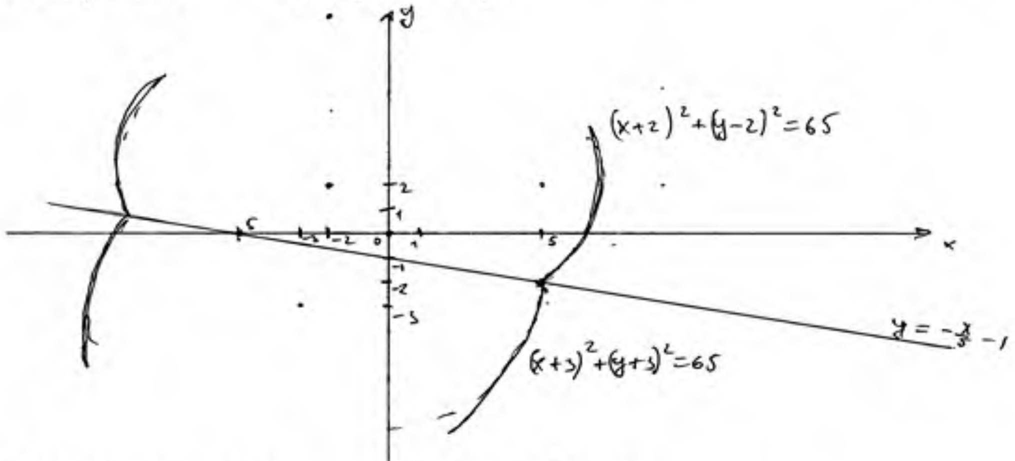
Рассмотрим 2 случая при $x+5y+5 \ge 0$ и при $x+5y+5<0$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+5x+y^2+y-x-5y-5=52 \\ x+5y+5 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+5x+y^2+y+x+5y+5=52 \\ x+5y+5<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x+2)^2+(y-2)^2=\cancel{49}\ 65 \\ y \ge -\frac{x}{5}-1 \end{cases} \\ \begin{cases} (x+3)^2+(y+3)^2=65 \\ y \le -\frac{x}{5}-1 \end{cases} \end{array}\right.$$

65 – графиком ф-ии является окр. с центром $(-2;2)$ и $r=\sqrt{65}$

– графиком ф-ии является окр. с центром $(-3;-3)$ и $r=\sqrt{65}$.

Построим эскизы графиков.



Рассмотрим $y+2=a(x-5)$.

$y=a(x-5)-2$. – графиком ф-ии является множество прямых, проходящих через точку $(5;-2)$. Тогда, для касания окр. $(\{-3;-3\};\sqrt{65})$ „a" должно быть равно -8, а для касания окр$(\{-2;2\};\sqrt{65})$ „a" должно быть равно $\frac{7}{4}$.

при $a \in [-8;\frac{7}{4}]$ сис-ма имеет 2 корня.

при $a \in (-\infty;-8) \cup (\frac{7}{4};+\infty)$ сис-ма имеет 3 корня.

Ответ: $a \in [-8;\frac{7}{4}]$.

Комментарий.

Решение и ответ верные, хотя нет обоснования, почему для касания a «a должно быть равно –8» или «…7/4».

Оценка эксперта: 4 балла.

Пример 18.3.2

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+5x+y^2-y-|x+5y+5|=52, \\ y-2=a(x-5) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Ответ: $-8 \le a \le \frac{7}{4}$.

$$\begin{cases} x^2+5x+y^2+y-|x+5y+5|=52 \quad (1) \\ y+2=a(x-5) \quad (2) \end{cases}$$

(1) $$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+5y+5 \ge 0 \\ x^2+5x+y^2+y-x-5y-5=52 \end{cases} \\ \begin{cases} y < \frac{-x-5}{5} \\ x^2+5x+y^2+y+x+5y+5=52 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \ge \frac{-x-5}{5} \\ x^2+4x+y^2-4y=57 \end{cases} \\ \begin{cases} y < \frac{-x-5}{5} \\ x^2+6x+y^2+6y=47 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \ge \frac{-x-5}{5} \\ (x+2)^2+(y-2)^2=65 \end{cases} \quad (1.1) \\ \begin{cases} y < \frac{-x-5}{5} \\ (x+3)^2+(y+3)^2=65 \end{cases} \quad (1.2) \end{array}\right.$$

$(x+2)^2+(y-2)^2=65$ – ур-е окр-ти с центром в т. $Q(-2;2)$ и $R_1=\sqrt{65}$

$(x+3)^2+(y+3)^2=65$ – ур-е окр-ти с центром в т $P(-3;-3)$ и $R_2=R_1=\sqrt{65}$

1.1) $\begin{cases} y \ge \frac{-x-5}{5} \\ (x+2)^2+(y+2)^2=65 \end{cases}$

т. перес с прямой $y=\frac{-x-5}{5}$

$(x+2)^2+\left(\frac{-x-5}{5}-2\right)^2=65$

$(x+2)^2+\left(-\frac{(x+5)-10}{5}\right)^2=65$

$(x+2)^2+\frac{(x+5+10)^2}{25}=65$

$(x+2)^2+\frac{(x+15)^2}{25}=65$

$x^2+4x+4+\frac{x^2+30x+225}{25}=65$

$25x^2+100x+100+x^2+30x+225-65\cdot25=0$

$26x^2+130x-1300=0$

$2x^2+10x-100=0$

$x^2+5x-50=0$

$D=25+200=225$

$x_1=\frac{-5+15}{2}=5, \quad y_1=\frac{-5-5}{5}=-2$

$x_2=\frac{-5-15}{2}=-10 \quad y_2=\frac{10-5}{5}=1$

12.) $\begin{cases} y < \dfrac{-x-5}{5} \\ (x+3)^2+(y+3)^2 = 65 \end{cases}$

т перес с пр $y = \dfrac{-x-5}{5}$

$(x+3)^2 + \dfrac{(x+5+15)^2}{25} = 65$

$25x^2 + 6\cdot 25x + 9\cdot 25 + (x-10)^2 - 65\cdot 25 = 0$

$26x^2 + 150x + 225 - 20x + 100 - 1625 = 0$

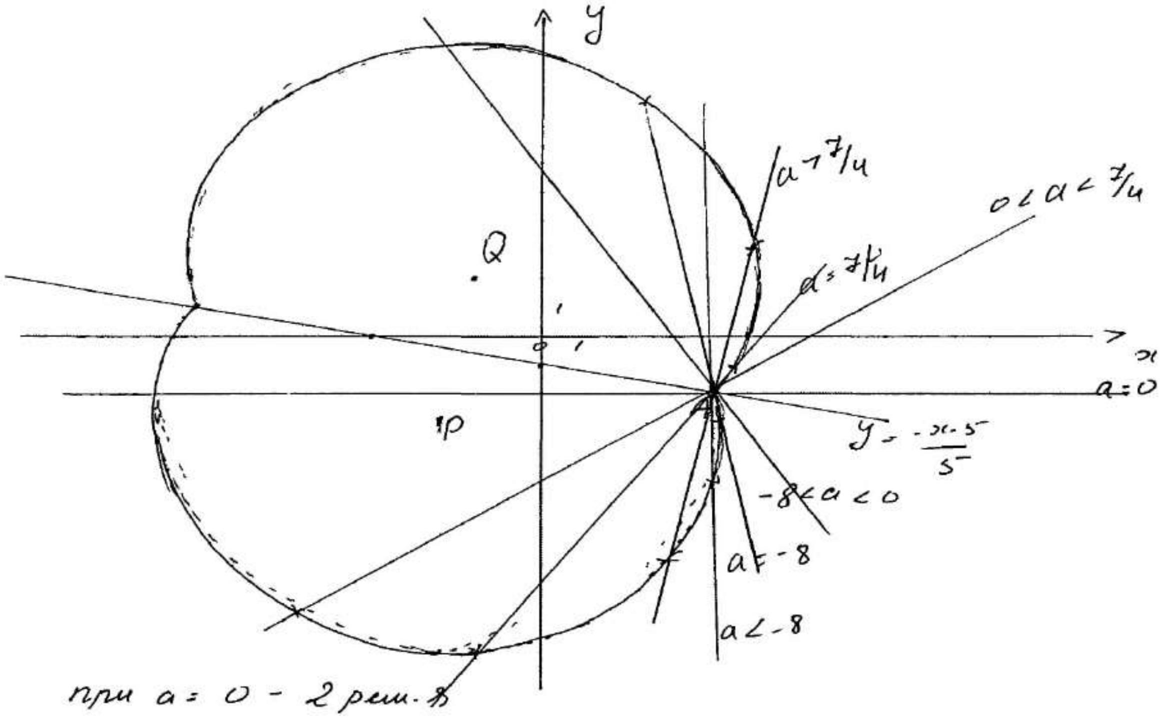
$26x^2 + 130x - 1300 = 0$

$x^2 + 5x - 50 = 0$

$x_3 = x_1 = 5$, $y_3 = y_1 = -2$

$x_4 = x_2 = -10$ $y_4 = y_2 = 1$

(2) $y = a(x-5) - 2$ – ур-е пучка прямых, проход. через т $A(5; -2)$ см продолжение на доп бланке



при $a = 0$ – 2 реш.

найдём a, при к.м $y = a(x-5) - 2$ касается окр-ти с ц. в т Q

$(x+2)^2 + (a(x-5)-2-2)^2 = 65$

$x^2 + 4x + 4 + (a(x-5) - 4)^2 = 65$

$x^2 + 4x + 4 + a^2(x-5)^2 - 8a(x-5) + 16 - 65 = 0$

$x^2 + 4x + a^2(x^2 - 10x + 25) - 8ax + 40a - 45 = 0$

$\cancel{x^2+4} \; x^2(1+a^2) + x(4 - 10a^2 - 8a) + 25a^2 + 40a - 45 = 0$

$\dfrac{D}{4} = (2 - 5a^2 - 4a)^2 - (a^2+1)(25a^2 + 40a - 45) =$

$(5a^2 + 4a - 2)^2 - (a^2+1)(25a^2 + 40a - 45) =$ см продолж на обороте

$\cancel{25a^4} + \cancel{40a^3} + 16a^2 - \cancel{20a^2} - 16a + 4 - \cancel{25a^4} - \cancel{40a^3} + \cancel{45a^2} -$

$- \cancel{25a^2} - 40a + 45 = 16a^2 - 40a + 45 - 16a + 4 =$

$= 16a^2 - 56a + 49 = 0$ (т.к. ур-е должно иметь ед-е реш-е)

$16a^2 - 56a + 49 = 0$

$\frac{D}{4} = 28^2 - 16 \cdot 49 = 0$

$(4a - 7)^2 = 0$

при $a = \frac{7}{4}$ – 3 реш-я

при $a > \frac{7}{4}$ – 3 реш-я, при $a \in (0; \frac{7}{4})$ – 2 р-я

найдём a, при к-х $y = a(x-5) - 2$ кас. окр-ти ω в т P

$x^2 + 6x + (a(x-5)-2)^2 + 6(a(x-5)-2) - 47 = 0$

$x^2 + 6x + a^2(x-5)^2 - 4a(x-5) + 4 + 6a(x-5) - 12 - 47 = 0$

$x^2 + 6x + a^2(x^2 - 10x + 25) - 4ax + 20a + 6ax - 30a - 55 = 0$

$x^2(1 + a^2) + 6x - 10a^2x + 25a^2 + 2ax - 10a - 55 = 0$

$x^2(a^2+1) + x(6 - 10a^2 + 2a) + 25a^2 - 10a - 55 = 0$

$\frac{D}{4} = (3 + a - 5a^2)^2 - (a^2+1)(25a^2 - 10a - 55) =$

$= 9 + 6(a - 5a^2) + (a - 5a^2)^2 - 25a^4 + 10a^3 + 55a^2 -$

$- 25a^2 + 10a + 55 = \cancel{25a^4} - \cancel{10a^3} + a^2 + 6a - \cancel{30a^2} +$

$+ 9 - \cancel{25a^4} + \cancel{10a^3} + \cancel{55a^2} - \cancel{25a^2} + 10a + 55 = a^2 + 16a + 64$

$a^2 + 16a + 64 = 0$ (т.к. ур-е должно иметь ед-е реш-е)

$(a + 8)^2 = 0$

при $a = -8$ – 3 р-я

при $a < -8$ – 3 р-я, при $a \in (-8; 0)$ – 2 р-я

Ответ: 2 р-я при $a \in (-8; 0) \cup (0; \frac{7}{4}) \cup \{0\}$, т.е. при $a \in (-8; \frac{7}{4})$

Комментарий.

Ход решения ясен, изложен более чем подробно. Ошибок нет, кроме недочёта: концы промежутка не включены в ответ.

Оценка эксперта: 3 балла.

Пример 18.4.1

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

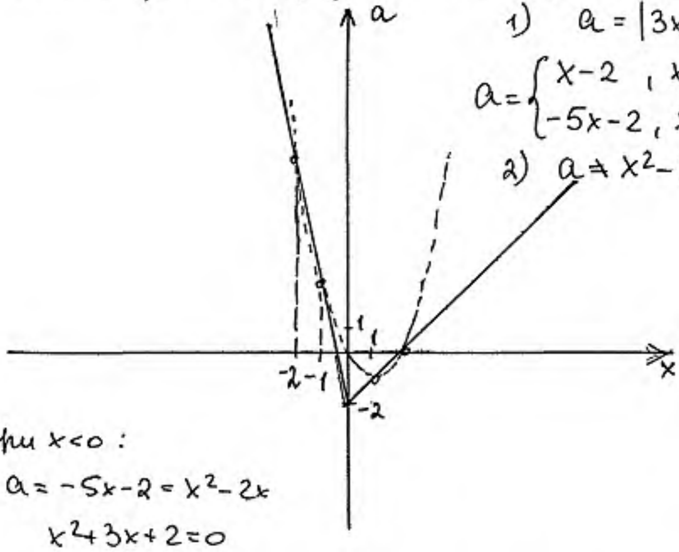
$$\frac{|3x|-2x-2-a}{x^2-2x-a}=0$$

имеет ровно два различных корня.

Ответ: $-2<a<-1$; $-1<a<0$; $0<a<3$; $3<a<8$; $a>8$.

$$\frac{|3x|-2x-2-a}{x^2-2x-a}=0$$

имеет ровно 2 различных корня $a=?$



1) $a=|3x|-2x-2 \Rightarrow$

$$a=\begin{cases}x-2, & x\geqslant 0\\ -5x-2, & x<0\end{cases}$$

2) $a \neq x^2-2x$

при $x<0$:

$a=-5x-2=x^2-2x$

$x^2+3x+2=0$

$x_1=-1$

$x_2=-2$, x_1 и x_2 точки пересечения двух графиков при $a(x_1)$ и $a(x_2)$ уравнение будет иметь только одно решение.

при $x\geqslant 0$

$x-2=x^2-2x \Rightarrow x^2-3x+2=0 \Rightarrow x_3=1,\ x_4=2$; При $a(x_3)$ и $a(x_4)$ будет только одно решение $\Rightarrow$;

$\Rightarrow a(x_1)=3,\ a(x_2)=8,\ a(x_3)=-1,\ a(x_4)=0$, в точке $a=-2$ уравнение также будет иметь только одно решение, при $a<-2$ решений не будет $\Rightarrow a>-2,\ a\neq -1,\ a\neq 0,\ a\neq 3,\ a\neq 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow a\in(-2;-1)\cup(-1;0)\cup(0;3)\cup(3;8)\cup(8;+\infty)$.

Ответ: $a\in(-2;-1)\cup(-1;0)\cup(0;3)\cup(3;8)\cup$

$\cup(8;+\infty)$.

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 4 балла.

Пример 18.4.2

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{|3x|-2x-2-a}{x^2-2x-a}=0$$

имеет ровно два различных корня.

Ответ: $-2<a<-1$; $-1<a<0$; $0<a<3$; $3<a<8$; $a>8$.

$\frac{|3x|-2x-2-a}{x^2-2x-a}=0.$ Если знаменатель не равен нулю, то на него можно сократить.

$|3x|-2x-2-a=0$

Возведем уравнение в квадрат.

$(|3x|)^2=(2x+2+a)^2$

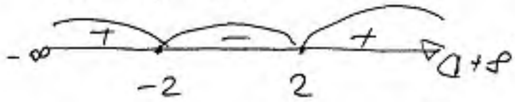
$5x^2+x(-8-4a)-4a-a^2-4=0$

$D=(-8-4a)^2-4\cdot 5(-(a^2+4a+4))=a^2+4a+4.$

Чтобы уравнение имело 2 решения D должен быть >0

$a^2+4a+4>0$

$(a-2)^2>0$



$\Rightarrow a\in(-\infty;-2);(2;+\infty).$

~~а~~ Теперь разберемся с ОДЗ.

$x^2-2x-a\neq 0.$ $\Rightarrow$ Нам не подходят варианты, когда $x^2-2x-a=0$ (если $x^2-2x-a=0$ уравнение имеет менее одного корня)

$D=4+4a.$

$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+4a}}{2}=1\pm\sqrt{1+a}.$

Если $a\in(-\infty;-2)$, то $x^2-2x-a\neq 0$

Если $a\in(2;+\infty)$, то $x^2-2x-a=0\Rightarrow$

$a\in(2;+\infty)$ не подходит.

Ответ: $a\in(-\infty;-2)$.

Комментарий.

Неверное решение уравнения, содержащего переменную под знаком модуля. Неверная логика исследования количества корней.

Оценка эксперта: 0 баллов.

7. Критерии проверки и оценка решений заданий 19

Задание 19 проверяет достижение следующих целей изучения математики на профильном уровне: «развитие логического мышления, алгоритмической культуры, пространственного воображения, математического мышления и интуиции, творческих способностей, необходимых для продолжения образования и для самостоятельной деятельности в области математики и её приложений в будущей профессиональной деятельности».

При этом, для решения этой задачи не требуется никаких знаний, выходящих за рамки школьного курса.

Условие задания 19 разбито на пункты – ряд подзадач (частных случаев), последовательно решая которые, можно в итоге полностью выполнить задание. Такое разбиение, в первую очередь, облегчает участнику экзамена планирование работы над данной задачей, а также позволяет более чётко и прозрачно провести оценивание выполнения задания.

Задача 19 (демонстрационный вариант ЕГЭ 2024 г.)

Из пары натуральных чисел $(a;b)$, где $a>b$, за один ход получают пару $(a+b;a-b)$.

а) Можно ли за несколько таких ходов получить из пары $(100;1)$ пару, большее число в которой равно 400?

б) Можно ли за несколько таких ходов получить из пары $(100;1)$ пару $(806;788)$?

в) Какое наименьшее a может быть в паре $(a;b)$, из которой за несколько ходов можно получить пару $(806;788)$?

Решение. а) Из пары $(100;1)$ за один ход получается пара $(101;99)$, за два хода получается пара $(200;2)$, за три хода получается пара $(202;198)$, а за четыре хода получается пара $(400;4)$.

б) Заметим, что за один ход из пары $(a;b)$ получается пара $(a+b;a-b)$, а за два хода получается пара $(2a;2b)$. Следовательно, из пары $(100;1)$ можно получить только пары $\left(2^k\cdot 100;2^k\right)$ и $\left(2^k\cdot 101;2^k\cdot 99\right)$, где k — неотрицательное целое число. Число 806 не равно $2^k\cdot 100$ и $2^k\cdot 101$, а значит, пару $(806;788)$ невозможно получить за несколько ходов из пары $(100;1)$.

в) Заметим, что пару $(c; d)$ за один ход можно получить только из пары $\left(\frac{c+d}{2}; \frac{c-d}{2}\right)$ при условии, что числа c и d одной чётности.

Таким образом, пара $(806; 788)$ получается из пары $(797; 9)$, которая получается из пары $(403; 394)$. Пару $(403; 394)$ невозможно получить за один ход ни из какой пары, поскольку числа 403 и 394 имеют разную чётность. Следовательно, наименьшее число a в паре $(a; b)$, из которой за несколько ходов можно получить пару $(806; 788)$, равно 403.

Ответ: а) да; б) нет; в) 403.

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

Задание 19.1

В классе больше 10, но не больше 26 учащихся, а доля девочек не превышает 21 %.

а) Может ли в этом классе быть 5 девочек?

б) Может ли доля девочек составить 30 %, если в этот класс придёт новая девочка?

в) В этот класс пришла новая девочка. Доля девочек в классе составила целое число процентов. Какое наибольшее число процентов может составить доля девочек в классе?

Решение.

а) Если в классе 25 учащихся, среди которых 5 девочек, то их доля составляет 20 %, что не превышает 21 %.

б) Если доля девочек в классе составила 30 %, то количество учащихся в нём делится на 10. Следовательно, после появления новой девочки в классе стало 20 учащихся, среди которых 6 девочек. Значит, до появления новой девочки в классе было 19 учащихся, среди которых было 5 девочек. В этом случае доля девочек превышает 21 %. Следовательно, доля девочек не может составить 30 %.

в) Пусть в классе было b учащихся, среди которых a девочек. Тогда, по условию, выполнены неравенства $10 < b \leq 26$ и $\frac{a}{b} \leq 0,21$. Следовательно,

$$\frac{a+1}{b+1} < \frac{a+1}{b} = \frac{a}{b} + \frac{1}{b} < \frac{a}{b} + 0,1 \leq 0,31,$$

а значит, после появления новой девочки в классе доля девочек будет меньше 31 %. В пункте *б* было доказано, что эта доля не может составить 30 %.

После появления новой девочки в классе доля девочек в процентах составляет $\frac{100(a+1)}{b+1}$. Предположим, что это число целое. Если оно не делится на 4 и не делится на 5, то число $b+1$ должно делиться на 50. Это невозможно, поскольку $b+1 \leq 27$. Будем последовательно рассматривать числа, меньшие 30, делящиеся на 4 или на 5.

Если $\frac{100(a+1)}{b+1} = 28$, то $25(a+1) = 7(b+1)$. Учитывая, что $b+1 \leq 27$, получаем: $b = 24$, $a = 6$. В этом случае $\frac{a}{b} = 0,25 > 0,21$.

Если $\frac{100(a+1)}{b+1} = 25$, то $4(a+1) = b+1$. Для чисел $a = 2$ и $b = 11$ это равенство верно, $10 < b \leq 26$ и $\frac{a}{b} = \frac{2}{11} < 0,2 \leq 0,21$.

Таким образом, после появления новой девочки в классе наибольшая целая доля девочек в процентах составляет 25.

Ответ: а) да; б) нет; в) 25.

Задание 19.2

В последовательности a_1, a_2, …, a_{n-1}, a_n, состоящей из целых чисел, $a_1 = 1$, $a_n = 235$. Сумма любых двух соседних членов последовательности равна 3, 5 или 25.

а) Приведите пример такой последовательности.

б) Может ли такая последовательность состоять из 1000 членов?

в) Из какого наименьшего числа членов может состоять такая последовательность?

Решение.

а) Например, последовательность 1, 2, 3, 0, 5, -2, 7, -4, …, 233, -230, 235 удовлетворяет условию задачи (чередуются суммы чисел 3 и 5).

б) Поскольку 3, 5 и 25 – нечётные числа, любые два соседних члена последовательности имеют разную чётность. На нечётных местах должны стоять нечётные числа, а на чётных – чётные. Число 235 нечётное, поэтому оно не может стоять на чётном месте. Значит, последовательность не может состоять из 1000 членов.

в) Рассмотрим три члена последовательности: a_k, a_{k+1}, a_{k+2} $(1 \le k \le n-2)$. Поскольку $a_k + a_{k+1} \ge 3$, $a_{k+1} + a_{k+2} \le 25$, получаем: $a_{k+2} \le a_k + 22$.

В предыдущем пункте было показано, что последовательность должна состоять из нечётного числа членов. Пусть $n = 2m+1$, тогда

$$a_n = a_{2m+1} \le a_{2m-1} + 22 \le a_{2m-3} + 22 \cdot 2 \le ... \le a_1 + 22 \cdot m;\ 235 \le 1 + 22m,$$

откуда $m \ge 11$. Значит, последовательность состоит не менее чем из 23 чисел. Приведём пример последовательности, удовлетворяющей условию задачи, состоящей из 23 членов: 1, 2, 23, -20, 45, -42, 67, -64, 89, -86, 111, -108, 133, -130, 155, -150, 175, -170, 195, -190, 215, -210, 235.

Ответ: а) например, 1, 2, 3, 0, 5, -2, 7, -4, …, 233, -230, 235; б) нет; в) 23.

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а, б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пунктах *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пунктах *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

Задание 19.3

На доске написано 30 натуральных чисел (числа могут повторяться), каждое из которых либо зелёного, либо красного цвета. Каждое зелёное число кратно 3, а каждое красное число кратно 7. При этом все зелёные числа различны и все красные различны (какое-то зелёное число может равняться какому-то красному числу).

а) Может ли сумма написанных чисел быть меньше $1395 = 3 + 6 + \ldots + 90$, если все числа на доске кратны 3?
б) Может ли ровно одно число на доске быть красным, если сумма написанных чисел равна 1067?
в) Какое наименьшее количество красных чисел может быть на доске, если сумма написанных чисел равна 1067?

Решение.
а) Если на доске записано 29 зелёных чисел: 3, 6, …, 87 – и одно красное число 21, то их сумма меньше 1395.
б) Пусть на доске ровно одно красное число. Тогда зелёных чисел 29, а их сумма не меньше, чем сумма 29 наименьших чисел, делящихся на 3:

$$3 + 6 + \ldots + 87 = \frac{90 \cdot 29}{2} = 1305.$$

Это противоречит тому, что сумма написанных чисел равна 1067.
в) Пусть на доске написано n красных чисел и $30 - n$ зелёных чисел. Тогда сумма красных чисел не меньше

$$7 + 14 + \ldots + 7n = \frac{7n^2 + 7n}{2},$$

а сумма зелёных чисел не меньше

$$3 + 6 + \ldots + 3(30 - n) = \frac{3(31 - n)(30 - n)}{2} = \frac{3n^2 - 183n + 2790}{2}.$$

Таким образом, $1067 \geq 5n^2 - 88n + 1395$; $5n^2 - 88n + 328 \leq 0$,
откуда, учитывая, что n – целое, получаем $n \geq 6$.
Приведём пример 6 красных чисел и 24 зелёных чисел, сумма которых равна 1067: 7, 14, 21, 28, 35, 56, 3, 6, …, 66, 69, 78.

Ответ: а) да; б) нет; в) 6.

Задание 19.4

На столе лежит 40 карточек, часть из которых красного цвета, а остальные синего (есть хотя бы по одной карточке каждого цвета). На каждой карточке написано натуральное число. Все числа, написанные на синих карточках, различны. Любое число на красной карточке меньше любого числа на синей карточке. Среднее арифметическое всех чисел на карточках равно 14. Если утроить числа на синих карточках, то среднее арифметическое всех чисел станет равно 39.

а) Может ли на столе быть ровно 10 синих карточек?

б) Может ли на столе быть ровно 10 красных карточек?

в) Какое наибольшее количество синих карточек может быть на столе?

Решение.

а) Если на тридцати красных карточках написано число 2, а на синих карточках написаны числа 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 437, то условия задачи выполнены.

б) Пусть сумма чисел, написанных на красных карточках, равна k, а сумма чисел, написанных на синих карточках, равна s. Тогда

$$k+s=560;\ k+3s=1560,$$

откуда $k=60,\ s=500$.

Предположим, что красных карточек 10 штук. Если все числа на красных карточках не превосходят 5, то их сумма k не превосходит $5\cdot 10=50$. Но $k=60$, значит, есть хотя бы одна карточка, на которой написано число, не меньшее 6. Так как любое число на синей карточке больше любого числа на красной карточке, то все числа на синих карточках не меньше 7, а их сумма не меньше $7+8+\ldots+36=645$. Но $s=500$, значит, не может быть ровно 10 красных карточек.

в) Предположим, что синих карточек n штук, а наибольшее число, написанное на красной карточке, равно u. Тогда $(40-n)u\geq 60$. С другой стороны, так как любое число на синей карточке больше любого числа на красной карточке, все числа на синих карточках не меньше $u+1$, а их сумма не меньше

$$(u+1)+(u+2)+\ldots+(u+n)=nu+\frac{n(n+1)}{2}.$$

Но $s=500$, значит,

$$nu+\frac{n(n+1)}{2}\leq 500;\ u\leq\frac{500}{n}-\frac{n+1}{2}.$$

Таким образом, получаем:

$$\frac{60}{40-n} \leq u \leq \frac{500}{n} - \frac{n+1}{2}.$$

Заметим, что это неравенство не выполняется при $n \geq 27$, поскольку при $n \geq 27$

$$\frac{60}{40-n} \geq \frac{60}{13} > 4 \text{ и } \frac{500}{n} - \frac{n+1}{2} \leq \frac{122}{27} < 5.$$

Но неравенство $4 < u < 5$ не имеет целых решений, значит, синих карточек не может быть больше 26.

Покажем, что может быть 26 синих карточек. Если на десяти красных карточках написано число 4, на четырёх красных карточках написано число 5, а на синих карточках написаны числа 6, 7, …, 29, 30, 50, то условия задачи выполнены.

Ответ: а) да; б) нет; в) 26.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а, б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пунктах *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пунктах *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

Примеры оценивания решений задания 19

Пример 19.1.1

В классе больше 10, но не больше 26 учащихся, а доля девочек не превышает 21 %.

а) Может ли в этом классе быть 5 девочек?

б) Может ли доля девочек составить 30 %, если в этот класс придёт новая девочка?

в) В этот класс пришла новая девочка. Доля девочек в классе составила целое число процентов. Какое наибольшее число процентов может составить доля девочек в классе?

Ответ: а) да; б) нет; в) 25.

№19.

Пусть мальчиков – x; девочек – y; $x, y \in N$; $10 < x+y \leq 26$.

а) Да, например $x=21$; $y=5$. Всего 26: $10 < 26 \leq 26$

При этом: $\frac{5}{26} \vee \frac{21}{100} \Leftrightarrow \frac{500}{2600} \vee \frac{546}{2600} \Leftrightarrow 500 < 546 \Rightarrow$
$\frac{5}{26} < \frac{21}{100}$

б) По условию: $\frac{y}{x+y} \leq 0{,}21 \to y \leq 0{,}21x + 0{,}21y \to 0{,}21x \geq 0{,}79y$

$x \geq \frac{0{,}79y}{0{,}21}$

Если в класс придет новая девочка, то их будет $(y+1)$.

По усл.: $\frac{y+1}{x+y+1} = 0{,}3 \Leftrightarrow y+1 = 0{,}3x + 0{,}3y + 0{,}3$

$0{,}7y - 0{,}3x + 0{,}7 = 0 \quad |\cdot 10$

$7y - 3x + 7 = 0$

$3x = 7y + 7$

$x = \frac{7y+7}{3}$

Подставим x в $x \geq \frac{0{,}79y}{0{,}21}$:

$\frac{7y+7}{3} \geq \frac{79y}{21} \quad |\cdot 21 \Rightarrow 7(7y+7) \geq 79y$

$49y + 49 \geq 79y$

$30y \leq 49$. $\quad y \leq \frac{49}{30}$

Т.к. $y \in Z$, то единственное возможное $y = 1$.

Тогда $x = \frac{7 \cdot 1 + 7}{3} = \frac{14}{3} \notin N$.

Нет, такое невозможно.

Комментарий.

В заданиях пунктов *а* и *б* обоснованно получены верные ответы, задание пункта *в* не решено.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 19.1.2

В классе больше 10, но не больше 26 учащихся, а доля девочек не превышает 21 %.

а) Может ли в этом классе быть 5 девочек?

б) Может ли доля девочек составить 30 %, если в этот класс придёт новая девочка?

в) В этот класс пришла новая девочка. Доля девочек в классе составила целое число процентов. Какое наибольшее число процентов может составить доля девочек в классе?

Ответ: а) да; б) нет; в) 25.

№19.

а) Да, например 5 девочек и 26 всего.

Доля девочек: $\frac{5}{26}\cdot 100\% = 19\frac{6}{26}\%$

$$\begin{array}{r|l} 500 & 26 \\ \underline{26} & 19 \\ 240 & \\ \underline{234} & \\ 6 & \end{array}$$

б) Пусть девочек x, n – всего.

Тогда $\frac{x}{n} \le 0{,}21$, $\frac{x+1}{n+1} = \frac{3}{10}$

$\cancel{\frac{0{,}3n-0{,}7}{n} \le 0{,}21}$

$\cancel{0{,}3 - \frac{0{,}7}{n} \le 0{,}21}$

$\cancel{\frac{0{,}7}{n} \ge 0{,}09}$ $\cancel{n \le \frac{700}{9}}$

Т.к. x и n – целые

Тогда может быть

$x+1$	3	6	9	…
$n+1$	10	20	30	…

Но т.к. $11 \le n \le 26$, то $12 \le n+1 \le 27$

Единств. возможный вариант – $x = 5$, $n = 19$.

Но тогда изначально доля девочек была $\frac{5}{19}\cdot 100\% = 26\frac{6}{19}\%$, что противоречит условию. Невозможно.

в) Пусть x – девочек, y – мальчиков. Новая доля девочек: $\frac{x+1}{x+y+1}$.

Видно, что чем меньше y, тем больше доля.

Комментарий.

В заданиях пунктов *а* и *б* обоснованно получены верные ответы, задание пункта *в* не решено.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 19.1.3

В классе больше 10, но не больше 26 учащихся, а доля девочек не превышает 21 %.

а) Может ли в этом классе быть 5 девочек?

б) Может ли доля девочек составить 30 %, если в этот класс придёт новая девочка?

в) В этот класс пришла новая девочка. Доля девочек в классе составила целое число процентов. Какое наибольшее число процентов может составить доля девочек в классе?

Ответ: а) да; б) нет; в) 25.

№19

10 < учеников ≤ 26 девочек ≤ 21%

а) если девочек 5 шт, то предположим, что это 20% от общего количества учеников; составим пропорцию

девочек, шт — процент, %

5 − 20 %

x − 100 %, $x = \frac{5 \cdot 100}{20} = 25$ учеников

условия выполняются, значит, такое может быть

Ответ: да, может

б)

предположим, что девочек было 5 шт, а когда пришла новая, их стало 6, которые составляют 30% от общего кол-ва учеников; составим пропорцию

6 − 30%

x − 100 %

$x = \frac{6 \cdot 100}{30} = 20$ учеников

в таком случае условия выполняются, значит, такое может быть

Ответ: да, может

в) если в класс пришла новая девочка, то общее количество учеников теперь не должно превышать 27 штук.

составим пропорцию

X девочек − max. ~~процент~~ %

Y человек − 100 %

~~X девочек < Y~~

X девочек · 100 должно нацело делиться на Y по условию ← max · % = $\frac{X \text{ девочек} \cdot 100}{Y}$

предположим, что девочек в классе 9, а всего 12 человек, тогда:

$\% = \frac{9 \cdot 100}{12} = 75\%$

если девочек 12, а всего 15 учеников, тогда

$\% = \frac{12 \cdot 100}{15} = 80\%$

если девочек 16, а всего учеников 20, то

$$\% = \frac{16\cdot \overset{5}{\cancel{100}}}{\cancel{20}} = 80\%$$

если девочек 9, а всего человек 15, то

$$\% = \frac{\overset{3}{\cancel{9}}\cdot \overset{20}{\cancel{100}}}{\underset{5}{\cancel{15}}} = 60\%$$

При дальнейшем подборе % девочек уменьшается, значит максимальный процент равняется 80%

Ответ: а) да

б) да

в) 80 %

Комментарий.

Задание пункта *а* выполнено верно, в заданиях пунктов *б* и *в* получены неверные ответы.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 19.2.1

В последовательности a_1, a_2, …, a_{n-1}, a_n, состоящей из целых чисел, $a_1 = 1$, $a_n = 235$. Сумма любых двух соседних членов последовательности равна 3, 5 или 25.

а) Приведите пример такой последовательности.

б) Может ли такая последовательность состоять из 1000 членов?

в) Из какого наименьшего числа членов может состоять такая последовательность?

Ответ: а) например, 1, 2, 3, 0, 5, -2, 7, -4, …, 233, -230, 235; б) нет; в) 23.

б) Нет. т.к. в этой посл. $a_i + a_{i+1} = \left[\begin{array}{l}5\\3\\25\end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. a_1 - неч., то все четные члены - чет,

а нечетные - неч $\Rightarrow$ $a_n = 235$ - неч член т.е

n не. 1000 $\Rightarrow$ ~~невозможна~~ не может.

~~в) (1; 2; -1; 6; ...~~

а) 1; -26; 51; -46; 71; -66; 91; -86; 111; -106; 131;
-126; 151; -146; 171; -166; 191; -188; 213; -210; 235

Комментарий.

В пункте *а* допущена ошибка: сумма первых двух чисел равна –25. При ответе на вопрос пункта *б* участник экзамена верно показал, что случай $n = 1000$ невозможен.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 19.2.2

В последовательности a_1, a_2, …, a_{n-1}, a_n, состоящей из целых чисел, $a_1 = 1$, $a_n = 235$. Сумма любых двух соседних членов последовательности равна 3, 5 или 25.

а) Приведите пример такой последовательности.

б) Может ли такая последовательность состоять из 1000 членов?

в) Из какого наименьшего числа членов может состоять такая последовательность?

Ответ: а) например, 1, 2, 3, 0, 5, -2, 7, -4, …, 233, -230, 235; б) нет; в) 23.

А) Пример такой последовательности:

1, 2, 3, 0, 5, −2, 7, −4, 9, −6, 11, −8, 13, −10, 15, −12, 17, −14, 19, −16, 21, −18, 23, −20, 25, −22, 27, −24, 29, −26, 31, −28, 33, −30, 35, −32, 37, −34, 59, −56, 81, −78, 103, −100, 125, −122, 147, −144, 169, −166, 191, −188, 213, −210, 235.

Б) Да, например, последовательность, членами которой являются чередующиеся числа 0 и 3.

0, 3, 0, 3, 0, 3…

Сумма любых двух соседних членов в последовательности равна 3, что соответствует условию.

В последовательности, состоящей из 1000 членов, будет пятьсот 0 и пятьсот 3. Все нечётные члены последовательности будут нулями, все чётные – тройками.

Комментарий.

В пункте *а* верно приведён пример. Решение пункта *б* неверно.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 19.3.1

На доске написано 30 натуральных чисел (числа могут повторяться), каждое из которых либо зелёного, либо красного цвета. Каждое зелёное число кратно 3, а каждое красное число кратно 7. При этом все зелёные числа различны и все красные различны (какое-то зелёное число может равняться какому-то красному числу).

а) Может ли сумма написанных чисел быть меньше $1395 = 3 + 6 + \ldots + 90$, если все числа на доске кратны 3?

б) Может ли ровно одно число на доске быть красным, если сумма написанных чисел равна 1067?

в) Какое наименьшее количество красных чисел может быть на доске, если сумма написанных чисел равна 1067?

Ответ: а) да; б) нет; в) 6.

а) Да, пример:

$\underbrace{3; 6; 9; 12; 15; 18, 21, .. 87}_{\text{зеленые}}$; $\underset{\text{красное}}{21}$

Сумма чисел $\overset{1326}{=}$ < 1395, ~~т.к. 90 заменили на 21.~~

б) Найдем минимально возможную сумму с одним красным числом.
Т.к. сумма → min ⇒ красное число = 7,
зеленые – 3; 6; 9; 12; 15; 18 ..., 87.

Σ чисел = 1305 + 7 = 1312 > 1067 ⇒ не может

Ответ: нет.

в) Пусть $f(n)$ – функция, значение которой равно минимально возможной сумме при данном n, где n – кол-во красных чисел.

$$f(n) = 7\cdot\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right) + 3\cdot\left(\frac{(30-n)(31-n)}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(7n^2 + 7n + 3n^2 - \underset{183n}{3\cdot 61n} + \underset{2790}{3\cdot 30\cdot 31}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(10n^2 - 176n + 2790\right) = 5n^2 - 88n + 1395.$$

найдем минимальное n ($n \in \mathbb{Z}^+$), такое что $f(n) \le 1067$.

$$5n^2 - 88n + 1395 \le 1067$$

$$5n^2 - 88n + 328 \le 0$$

$$\frac{D}{4} = 44^2 - 328 \cdot 5 = 1936 - 1640 = 296.$$

$$n \in \left[\frac{44-\sqrt{296}}{5}; \frac{44+\sqrt{296}}{5}\right] \Rightarrow n = 6.$$

$$f(6) = 7 \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} + 3 \cdot \frac{24 \cdot 25}{2} = 3(49 + 12 \cdot 25) = 3 \cdot 349 = $$
$$= 1047.$$

$f(5) = 1380 \underset{>1067}{\Rightarrow}$ для 5 - неверно.

Ответ: 6 - наименьшее кол-во красных.

пример:

7; 14; 21; 28; 35; 56.

3; 6; 9; 12; ..... 69; 78; ~~81~~

Комментарий.

Обоснованно получены верные ответы во всех пунктах.

Оценка эксперта: 4 балла.

Пример 19.3.2

На доске написано 30 натуральных чисел (числа могут повторяться), каждое из которых либо зелёного, либо красного цвета. Каждое зелёное число кратно 3, а каждое красное число кратно 7. При этом все зелёные числа различны и все красные различны (какое-то зелёное число может равняться какому-то красному числу).

а) Может ли сумма написанных чисел быть меньше $1395 = 3 + 6 + \ldots + 90$, если все числа на доске кратны 3?

б) Может ли ровно одно число на доске быть красным, если сумма написанных чисел равна 1067?

в) Какое наименьшее количество красных чисел может быть на доске, если сумма написанных чисел равна 1067?

Ответ: а) да; б) нет; в) 6.

а) 1395 = 3+6+...+90 — 30 чисел. Предположим изначально все они зелёные.
Да, может, т.к. мы можем заменить число 90 на число 21, при написанное другим цветом (красным), а все тогда общая сумма уменьшится на 69 — ч.т.д.

б) Возьмём наименьшую сумму чисел написанных только зелёным.
Это 1395 = 3+6...+90. Нам нужно добавить одно красное число. Для того, чтобы минимизировать сумму мы уберём самое большое зелёное — 90 и добавим минимально возможное красное — 7. Итоговая сумма 1395−90+7=1312 > 1067 => это невозможно.

в) Числа кратные 3 дают остатки при делении на 7 в ~~то~~ таком порядке: 3 6 2 5 1 4 0
Число 1067 даёт остаток 3 при делении на 7 =>
Все зелёные числа должны насколько можно быть сгруппированы к нему
Они не могут покрыть и по 29 т.к. 3...+87 = ~~1342~~ 1312 > ~~1067~~ 1067 =>
=> они должны покрыть по 63.
3+...+66 = 69·11 = ~~759~~ 726, ~~1067−726~~ 1067−759 = 308 ~~80~~ 308 | 7 = 44

Комментарий.

Приведено верное решение пункта *а*. Приведено верное решение пункта *б*. Решение в пункте *в* не завершено.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 19.3.3

На доске написано 30 натуральных чисел (числа могут повторяться), каждое из которых либо зелёного, либо красного цвета. Каждое зелёное число кратно 3, а каждое красное число кратно 7. При этом все зелёные числа различны и все красные различны (какое-то зелёное число может равняться какому-то красному числу).

а) Может ли сумма написанных чисел быть меньше $1395 = 3 + 6 + \ldots + 90$, если все числа на доске кратны 3?

б) Может ли ровно одно число на доске быть красным, если сумма написанных чисел равна 1067?

в) Какое наименьшее количество красных чисел может быть на доске, если сумма написанных чисел равна 1067?

Ответ: а) да; б) нет; в) 6.

а), индекс обозначает цвет, которым написано число

а) Может, так как одно и то же число может быть записано разными цветами.

пример: $3_з, 6_з, \ldots, 87_з, 21_к$

б) Нет.

Если только одно число красное, то в ~~последовательности~~ наборе с наименьшей суммой $(3_з, 6_з, \ldots, 87_з, 7_к)$ сумма равна 1312, что больше, чем 1067

в) 6.

В ~~последовательности~~ наборе с шестью красными числами и наименьшей суммой $(3_з, 6_з, \ldots, 76_з, 7_к, 14_к, \ldots, 35_к)$ сумма равна 1077, $1077 > 1067$

Однако сумма будет равна 1067, если в приведенном выше наборе заменить $66_з$ на $56_к$.

Комментарий.

Обоснованно получен ответ в пунктах *а* и *б*. В решении пункта *в* есть логическая ошибка: не доказано, что красных чисел не может быть меньше 5. Взяв 5 красных чисел, нужно взять 25 зелёных чисел, а не 26. Кроме того, сумма чисел найдена неверно.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 19.3.4

а) Да, может. Например, вместо зеленого числа 24 можно написать красное число 21 (сказано, что красное число может равняться зеленому). Тогда сумма примет вид $3+6+\ldots+21+21+27+\ldots+90=1392<1395$.

Ответ: да, может.

б) Число 1067 имеет остаток 2 при делении на 3. Следовательно, красное число тоже должно иметь остаток 2 при делении на 3 (т.к. все зеленые числа имеют остаток 0). Наименьшее такое число – 14. Как известно из пункта а), сумма 30 наименьших зеленых чисел равна 1395. Если если заменить наибольшее из них (90) на 14, то сумма будет равна $1395-90+14=1319>1067$. Следовательно, такого быть не может.

Ответ: нет, не может.

в) $1395-1067=328 \Rightarrow$ в сумме $3+6+\ldots+90$ необходимо так заменить несколько зеленых чисел на красные, чтобы суммарная разница между ними составила 328.

Во-первых, заметим, что за 5 замен это сделать невозможно, поскольку даже если заменить самые большие зеленые числа (90, 87, 84, 81, 78) на самые маленькие красные (7, 14, 21, 28, 35), то суммарная разница составит $305<328$.

Во-вторых, заметим, что если вдобавок заменить 72 на 49 ($72-49=23$), то суммарная разница составит как раз 328 ($305+23=328$) $\Rightarrow$ искомое наименьшее количество красных чисел – 6.

Ответ: 6.

Комментарий.

Обоснованно получен ответ в пунктах *а* и *б*. В пункте *в* неверное обоснование, поскольку не доказано, что набор с минимальным количеством красных чисел получается заменой максимальных чисел из набора 3, 6, ..., 90 на минимально возможные различные красные числа. Кроме того, разница между пятью самыми большими зелёными числами и пятью самыми маленькими красными числами составляет 315.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 19.4.1

На столе лежит 40 карточек, часть из которых красного цвета, а остальные синего (есть хотя бы по одной карточке каждого цвета). На каждой карточке написано натуральное число. Все числа, написанные на синих карточках, различны. Любое число на красной карточке меньше любого числа на синей карточке. Среднее арифметическое всех чисел на карточках равно 14. Если утроить числа на синих карточках, то среднее арифметическое всех чисел станет равно 39.

а) Может ли на столе быть ровно 10 синих карточек?

б) Может ли на столе быть ровно 10 красных карточек?

в) Какое наибольшее количество синих карточек может быть на столе?

Ответ: а) да; б) нет; в) 26.

а) среднее арифм. $= \dfrac{\text{сумма}}{\text{кол-во}}$

$\Rightarrow$ сумма = с.А $*$ кол-во.

Пусть сума синих L, а красных M, тогда $L + M = 14 \cdot 40$ – это в 1м случае.

Во втором $3L + M = 39 \cdot 40$

$$\begin{cases} L + M = 14 \cdot 40 \Rightarrow M = 14 \cdot 40 - L \quad (1) \\ 3L + M = 39 \cdot 40 \quad (2) \end{cases}$$

$1 \to 2 \qquad 3L + 14 \cdot 40 - L = 39 \cdot 40$

$2L = 40 \cdot 25$

$L = 20 \cdot 25 = 500$ – сумма всех синих $= 500 \Rightarrow 500$ надо получить 10 различными числами. Это можно сделать, например:

46; 54; 30; 70; 20; 80; 10; 90; 60; 40

б). $L = 500$; $M = 14 \cdot 40 - L \Rightarrow M = 520 - 500 = 20$.

Красных карточек 10. $\Rightarrow$ ~~числа с.А~~ среднее арифметическое должно быть 2.

Такими числами могут быть.

2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2 $\Rightarrow$ Да.

Комментарий.

В решении пункта *а* есть только описание чисел, написанных на синих карточках. Указание чисел, написанных на красных карточках, отсутствует. В решении пункта *б* допущена вычислительная ошибка. Решение пункта *в* отсутствует.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 19.4.2

На столе лежит 40 карточек, часть из которых красного цвета, а остальные синего (есть хотя бы по одной карточке каждого цвета). На каждой карточке написано натуральное число. Все числа, написанные на синих карточках, различны. Любое число на красной карточке меньше любого числа на синей карточке. Среднее арифметическое всех чисел на карточках равно 14. Если утроить числа на синих карточках, то среднее арифметическое всех чисел станет равно 39.

а) Может ли на столе быть ровно 10 синих карточек?

б) Может ли на столе быть ровно 10 красных карточек?

в) Какое наибольшее количество синих карточек может быть на столе?

Ответ: а) да; б) нет; в) 26.

x - сумма чисел на красных карточках

y - сумма чисел на синих карточках

$$\begin{cases} x+y=14\cdot 40=560 \\ x+3y=39\cdot 40=1560 \end{cases} \Rightarrow 2y=1000 \Rightarrow y=500,$$

$x=60 \Rightarrow$ сумма ~~чисел~~ неповторяющихся синих чисел $=500$, а красных 60

а) Да, может. Пример: на 30 красных карточках написано число 2, а на 10 синих числа 100, 150, 3, 7, 5, 4, 9, 21, 175, 21. Каждое число на синей карточке больше любого на красной и не повторяется.

б) Нет. Если на столе ровно 10 красных карточек, то самое маленькое из возможных максимальное число, написанное на карточке будет равно 6, тогда на синих карточках не должно быть числа меньше 7, синих карточек должно быть 30, а сумма на них равнять.

ся 500, самый меньший возможный шаг между числами $d=1$, тогда, если $a_1=7$, то сумма всех чисел $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$, где $n=30$, так как синих карточек всего 30, $a_n=29d+a_1 \Rightarrow$ $\Rightarrow S_n=\frac{7+29\cdot 1+7}{2}\cdot 30=(14+29)\cdot 15=43\cdot 15=645$, что больше 500, S_n - минимальная сумма, которая может получится, т.к. $S_n>500$ при данных условиях на столе не может быть ровно 10 красных карточек.

в) Ответ: 11, т.к. в других случаях общая сумма чисел на синих карточках превышает 500

Комментарий.

В решении пункта *а* приведён пример чисел на синих карточках, в котором есть повторяющееся число 21, да и сумма этих чисел равна 495, а не 500. Обоснованно получен ответ в пункте *б*. Решение пункта *в* фактически отсутствует.

Оценка эксперта: 1 балл.

Правила заполнения протоколов проверки развернутых ответов участников ЕГЭ экспертами предметных комиссий по математике в 2024 году

Результаты проверки выполнения заданий с развёрнутым ответом эксперты региональных предметных комиссий оформляют протоколами в соответствии с установленной формой «Протокол проверки развёрнутых ответов» (далее – протокол), который входит в состав рабочего комплекта эксперта (форма протокола и набор не более 10 обезличенных копий экзаменационных работ, коды которых уже проставлены в соответствующих полях протокола). Протокол оформляется (при печати) на конкретного эксперта, при этом в регистрационной части протокола указывается в том числе:

- информация о коде региона, в котором проводится проверка;
- коде и названии учебного предмета;
- коде, фамилии и инициалах эксперта, которому назначены на проверку экзаменационные работы с кодами, указанными в основной части протокола;
- номере протокола.

Проверка экзаменационных работ проводится на основе использования поэлементного анализа ответов экзаменуемых в соответствии с критериями оценивания, которые предоставляются для каждого задания, включенного в КИМ ЕГЭ. В критериях оценивания предоставляются содержание верного ответа и указания по оцениванию.

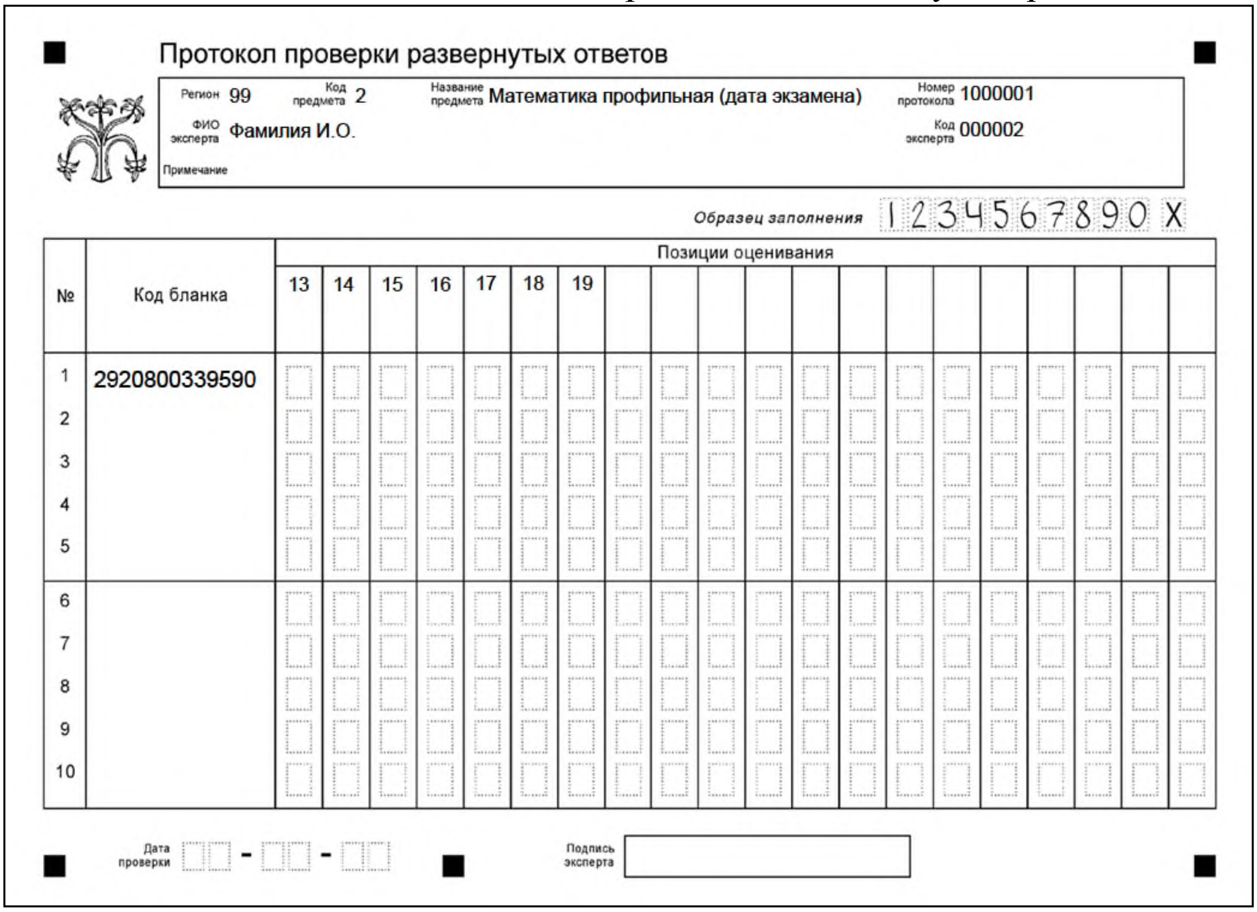
По итогам оценивания экзаменационных работ эксперт, проверяющий работы, вносит в соответствующие поля протокола баллы, выставленные им по каждой позиции оценивания, предусмотренной критериями оценивания развернутых ответов. Также эксперт вносит в протокол информацию о выбранном номере альтернативного задания (для учебных предметов, в КИМ по которым включены задания с возможностью выбора).

Протокол является машиночитаемой формой, которая после заполнения проходит автоматизированную обработку в РЦОИ, в процессе которой форма сканируется, а информация, внесенная в протокол, автоматизированно распознается и вносится в РИС (региональная информационная система ГИА). Для исключения неверного считывания информации о результатах оценивания экзаменационных работ, необходимо соблюдение правил заполнения протокола. Протокол заполняется черной гелевой ручкой.

Запрещено использование для заполнения протокола ручек с цветной пастой или карандашей (даже в случае их использования при проверке экзаменационных работ). Запрещается внесение какой-либо информации и/или пометок вне полей протокола, предназначенных для заполнения экспертом

Результаты оценивания каждой экзаменационной работы по математике переносятся в протокол проверки развёрнутых ответов следующим образом:

– баллы за выполнение задания **13** переносятся в колонку **13** протокола;
– баллы за выполнение задания **14** переносятся в колонку **14** протокола;
– баллы за выполнение задания **15** переносятся в колонку **15** протокола;
– баллы за выполнение задания **16** переносятся в колонку **16** протокола;
– баллы за выполнение задания **17** переносятся в колонку **17** протокола;
– баллы за выполнение задания **18** переносятся в колонку **18** протокола;
– баллы за выполнение задания **19** переносятся в колонку **19** протокола.


Протокол проверки развернутых ответов

Регион 99 Код предмета 2 Название предмета Математика профильная (дата экзамена) Номер протокола 1000001

ФИО эксперта Фамилия И.О. Код эксперта 000002

Примечание

Образец заполнения 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 X

№	Код бланка	Позиции оценивания																			
		13	14	15	16	17	18	19													
1	2920800339590																				
2																					
3																					
4																					
5																					
6																					
7																					
8																					
9																					
10																					

Дата проверки ☐☐ - ☐☐ - ☐☐ Подпись эксперта

Рисунок 1. Протокол проверки развёрнутых ответов 2024 г. Образец

При выставлении баллов за выполнение задания в протокол проверки развёрнутых ответов следует иметь в виду, что если ответ отсутствует (нет никаких записей, свидетельствующих о том, что экзаменуемый приступал к выполнению задания), то в протокол проставляется символ «X», а не «0». Если участник экзамена не приступал к выполнению задание, выполнение которых оценивается несколькими критериями, то символ «Х» выставляется по всем критериям, относящимся к этому заданию.

Любые исправления в протоколах запрещены, также запрещено использование замазок и затирок в целях исправления. В случае необходимости внесения исправления, эксперт сообщает об этом председателю ПК, который запрашивает в РЦОИ повторную распечатку протокола с номером испорченного. Ведется учет испорченных протоколов, уничтожение которых рекомендуется актировать после завершения соответствующего периода проведения ГИА.

Извлечения из Методических рекомендаций Рособрнадзора по формированию и организации работы предметных комиссий (ПК) субъекта Российской Федерации при проведении государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования.

Экспертам ПК запрещается:

– иметь при себе средства связи, фото-, аудио- и видеоаппаратуру;

– копировать и выносить из помещений, в которых работает ПК, экзаменационные работы, критерии оценивания, протоколы проверки экзаменационных работ;

– разглашать информацию, содержащуюся в указанных материалах.

Также запрещается:

– без уважительной причины покидать аудиторию;

– переговариваться с другими экспертами ПК, если речь не идёт о консультировании с председателем ПК или с экспертом ПК, назначенным по решению председателя ПК консультантом.

Если у эксперта возникают вопросы или проблемы, он должен обратиться к председателю ПК или лицу, назначенному председателем предметной комиссии консультантом.