Избранные задачи теории чисел

Богомолов Юрий Викторович

Ярославский региональный инновационно-образовательный центр «Новая школа»
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

25 января 2021 г.

Основная теорема арифметики

Основная теорема арифметики

Любое натуральное число, большее 1, можно разложить в произведение простых чисел, причём единственным образом (с точностью до порядка множителей).

Задача

Докажите, что НОД$(a,b) \cdot$ НОК$(a,b) = ab$.

Задача

Может ли разность двух полных квадратов равняться 2021? А 2022?

Задача

Решите в целых числах уравнение $xy + 2x + 4y = 33$.

Задача

В конце четверти Вовочка выписал подряд в строчку свои текущие отметки по пению и поставил между некоторыми из них знак умножения. Произведение получившихся чисел оказалось равным 2007. Какая отметка выходит у Вовочки в четверти по пению? («Колов» учительница пения не ставит.)

Задача

Числа от 1 до 10 разбили на две группы так, что произведение чисел в первой группе нацело делится на произведение чисел во второй. Какое наименьшее значение может быть у частного от деления первого произведения на второе?

Задача

(а) Найдите наименьшее натуральное число, половина которого — точный квадрат, а треть — точный куб.
(б) Найдите наименьшее натуральное число, половина которого — точный квадрат, треть — точный куб, а пятая часть — пятая степень.

Задача

Петя перемножил два одинаковых числа, а Вова перемножил все натуральные числа от 1 до 100. Докажите, что у Пети и Вовы получились разные ответы.

Задача

Перемножили все натуральные числа от 1 до 100 — получилось длинное многозначное число. На сколько нолей оно заканчивается?

Задача

На какое наименьшее натуральное число *не делится* число $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 199 \cdot 200$?

Задача

Про натуральные a и b ($a < 1000$) известно, что a^{21} делится на b^{10}. Докажите, что a^2 делится на b.

Задача

На новогодний вечер пришли несколько супружеских пар, у каждой из которых было от 1 до 10 детей. Дед Мороз выбирал одного ребёнка, одну маму и одного папу из трёх разных семей и катал их в санях. Оказалось, что у него было ровно 3630 способов выбрать нужную тройку людей. Сколько всего могло быть детей на этом вечере?

Задача

Арифметическая прогрессия состоит из целых чисел. Сумма первых n членов этой прогрессии является степенью двойки. Докажите, что n — также степень двойки.

Задача

На доске записаны числа 20 и 100. Разрешается дописать на доску произведение любых двух имеющихся на ней чисел. Можно ли такими операциями когда-нибудь получить на доске число $50\ldots0$ $(2021$ нуль)?

Сравнимость по модулю

Сравнимость по модулю

Числа a и b называются сравнимыми по модулю m, если $(a-b) \vdots m$.

Сравнимость по модулю

Числа a и b называются сравнимыми по модулю m, если $(a-b) \vdots m$.
Обозначения:

Сравнимость по модулю

Числа a и b называются сравнимыми по модулю m, если $(a-b) \,\vdots\, m$.

Обозначения: $a \equiv b \pmod{m}$

Сравнимость по модулю

Числа a и b называются сравнимыми по модулю m, если $(a-b) \,\vdots\, m$.
Обозначения: $a \equiv b \pmod{m}$ или $a \overset{m}{\equiv} b$.

Сравнимость по модулю

Числа a и b называются сравнимыми по модулю m, если $(a-b) \vdots m$.
Обозначения: $a \equiv b \pmod{m}$ или $a \overset{m}{\equiv} b$.

Сравнимость по модулю

Числа a и b называются сравнимыми по модулю m, если они дают одинаковые остатки от деления на m.

Сравнимость по модулю

Числа a и b называются сравнимыми по модулю m, если $(a-b) \vdots m$.
Обозначения: $a \equiv b \pmod{m}$ или $a \overset{m}{\equiv} b$.

Сравнимость по модулю

Числа a и b называются сравнимыми по модулю m, если $(a-b) \,\vdots\, m$.

Обозначения: $a \equiv b \pmod{m}$ или $a \overset{m}{\equiv} b$.

Свойства

Сравнимость по модулю

Числа a и b называются сравнимыми по модулю m, если $(a-b) \vdots m$.
Обозначения: $a \equiv b \pmod{m}$ или $a \overset{m}{\equiv} b$.

Свойства

1. $a \overset{m}{\equiv} a$.

Сравнимость по модулю

Числа a и b называются сравнимыми по модулю m, если $(a - b) \,\vdots\, m$.
Обозначения: $a \equiv b \pmod{m}$ или $a \overset{m}{\equiv} b$.

Свойства

1
- $a \overset{m}{\equiv} a$.
- Если $a \overset{m}{\equiv} b$, то $b \overset{m}{\equiv} a$.

Сравнимость по модулю

Числа a и b называются сравнимыми по модулю m, если $(a-b) \vdots m$.
Обозначения: $a \equiv b \pmod{m}$ или $a \overset{m}{\equiv} b$.

Свойства

1
- $a \overset{m}{\equiv} a$.
- Если $a \overset{m}{\equiv} b$, то $b \overset{m}{\equiv} a$.
- Если $a \overset{m}{\equiv} b$ и $b \overset{m}{\equiv} c$, то $a \overset{m}{\equiv} c$.

Сравнимость по модулю

Числа a и b называются сравнимыми по модулю m, если $(a-b) \vdots m$.
Обозначения: $a \equiv b \pmod{m}$ или $a \overset{m}{\equiv} b$.

Свойства

1.
   - $a \overset{m}{\equiv} a$.
   - Если $a \overset{m}{\equiv} b$, то $b \overset{m}{\equiv} a$.
   - Если $a \overset{m}{\equiv} b$ и $b \overset{m}{\equiv} c$, то $a \overset{m}{\equiv} c$.
2. Если $a \overset{m}{\equiv} b$, то

Сравнимость по модулю

Числа a и b называются сравнимыми по модулю m, если $(a-b) \,\vdots\, m$.

Обозначения: $a \equiv b \pmod{m}$ или $a \overset{m}{\equiv} b$.

Свойства

1.
   - $a \overset{m}{\equiv} a$.
   - Если $a \overset{m}{\equiv} b$, то $b \overset{m}{\equiv} a$.
   - Если $a \overset{m}{\equiv} b$ и $b \overset{m}{\equiv} c$, то $a \overset{m}{\equiv} c$.
2. Если $a \overset{m}{\equiv} b$, то • $a + c \overset{m}{\equiv} b + c$,

Сравнимость по модулю

Числа a и b называются сравнимыми по модулю m, если $(a-b) \,\vdots\, m$.
Обозначения: $a \equiv b \pmod{m}$ или $a \overset{m}{\equiv} b$.

Свойства

1.
   - $a \overset{m}{\equiv} a$.
   - Если $a \overset{m}{\equiv} b$, то $b \overset{m}{\equiv} a$.
   - Если $a \overset{m}{\equiv} b$ и $b \overset{m}{\equiv} c$, то $a \overset{m}{\equiv} c$.
2. Если $a \overset{m}{\equiv} b$, то • $a+c \overset{m}{\equiv} b+c$, • $ac \overset{m}{\equiv} bc$,

Сравнимость по модулю

Числа a и b называются сравнимыми по модулю m, если $(a-b) \,\vdots\, m$.

Обозначения: $a \equiv b \pmod{m}$ или $a \overset{m}{\equiv} b$.

Свойства

1.
   - $a \overset{m}{\equiv} a$.
   - Если $a \overset{m}{\equiv} b$, то $b \overset{m}{\equiv} a$.
   - Если $a \overset{m}{\equiv} b$ и $b \overset{m}{\equiv} c$, то $a \overset{m}{\equiv} c$.
2. Если $a \overset{m}{\equiv} b$, то $\bullet\, a+c \overset{m}{\equiv} b+c$, $\bullet\, ac \overset{m}{\equiv} bc$, $\bullet\, a^n \overset{m}{\equiv} b^n$.

Сравнимость по модулю

Числа a и b называются сравнимыми по модулю m, если $(a-b) \vdots m$.
Обозначения: $a \equiv b \pmod{m}$ или $a \overset{m}{\equiv} b$.

Свойства

1.
   - $a \overset{m}{\equiv} a$.
   - Если $a \overset{m}{\equiv} b$, то $b \overset{m}{\equiv} a$.
   - Если $a \overset{m}{\equiv} b$ и $b \overset{m}{\equiv} c$, то $a \overset{m}{\equiv} c$.
2. Если $a \overset{m}{\equiv} b$, то $\bullet\, a+c \overset{m}{\equiv} b+c$, $\bullet\, ac \overset{m}{\equiv} bc$, $\bullet\, a^n \overset{m}{\equiv} b^n$.
3. Если $a_1 \overset{m}{\equiv} b_1$ и $a_2 \overset{m}{\equiv} b_2$, то $a_1+a_2 \overset{m}{\equiv} b_1+b_2$.

Сравнимость по модулю

Числа a и b называются сравнимыми по модулю m, если $(a-b) \,\vdots\, m$.
Обозначения: $a \equiv b \pmod{m}$ или $a \overset{m}{\equiv} b$.

Свойства

1.
   - $a \overset{m}{\equiv} a$.
   - Если $a \overset{m}{\equiv} b$, то $b \overset{m}{\equiv} a$.
   - Если $a \overset{m}{\equiv} b$ и $b \overset{m}{\equiv} c$, то $a \overset{m}{\equiv} c$.
2. Если $a \overset{m}{\equiv} b$, то • $a+c \overset{m}{\equiv} b+c$, • $ac \overset{m}{\equiv} bc$, • $a^n \overset{m}{\equiv} b^n$.
3. Если $a_1 \overset{m}{\equiv} b_1$ и $a_2 \overset{m}{\equiv} b_2$, то $a_1+a_2 \overset{m}{\equiv} b_1+b_2$.
4. Если $a_1 \overset{m}{\equiv} b_1$ и $a_2 \overset{m}{\equiv} b_2$, то $a_1a_2 \overset{m}{\equiv} b_1b_2$.

Сравнимость по модулю

Числа a и b называются сравнимыми по модулю m, если $(a-b) \vdots m$.
Обозначения: $a \equiv b \pmod{m}$ или $a \overset{m}{\equiv} b$.

Свойства

1.
   - $a \overset{m}{\equiv} a$.
   - Если $a \overset{m}{\equiv} b$, то $b \overset{m}{\equiv} a$.
   - Если $a \overset{m}{\equiv} b$ и $b \overset{m}{\equiv} c$, то $a \overset{m}{\equiv} c$.
2. Если $a \overset{m}{\equiv} b$, то $\bullet\, a+c \overset{m}{\equiv} b+c$, $\bullet\, ac \overset{m}{\equiv} bc$, $\bullet\, a^n \overset{m}{\equiv} b^n$.
3. Если $a_1 \overset{m}{\equiv} b_1$ и $a_2 \overset{m}{\equiv} b_2$, то $a_1+a_2 \overset{m}{\equiv} b_1+b_2$.
4. Если $a_1 \overset{m}{\equiv} b_1$ и $a_2 \overset{m}{\equiv} b_2$, то $a_1a_2 \overset{m}{\equiv} b_1b_2$.
5. Если $ac \overset{m}{\equiv} bc$

Сравнимость по модулю

Числа a и b называются сравнимыми по модулю m, если $(a-b) \vdots m$.
Обозначения: $a \equiv b \pmod{m}$ или $a \overset{m}{\equiv} b$.

Свойства

1.
   - $a \overset{m}{\equiv} a$.
   - Если $a \overset{m}{\equiv} b$, то $b \overset{m}{\equiv} a$.
   - Если $a \overset{m}{\equiv} b$ и $b \overset{m}{\equiv} c$, то $a \overset{m}{\equiv} c$.
2. Если $a \overset{m}{\equiv} b$, то $\bullet\, a+c \overset{m}{\equiv} b+c$, $\bullet\, ac \overset{m}{\equiv} bc$, $\bullet\, a^n \overset{m}{\equiv} b^n$.
3. Если $a_1 \overset{m}{\equiv} b_1$ и $a_2 \overset{m}{\equiv} b_2$, то $a_1+a_2 \overset{m}{\equiv} b_1+b_2$.
4. Если $a_1 \overset{m}{\equiv} b_1$ и $a_2 \overset{m}{\equiv} b_2$, то $a_1a_2 \overset{m}{\equiv} b_1b_2$.
5. Если $ac \overset{m}{\equiv} bc$ и НОД$(c,m)=1$, то $a \overset{m}{\equiv} b$.

Сравнимость по модулю

Числа a и b называются сравнимыми по модулю m, если $(a-b) \vdots m$.
Обозначения: $a \equiv b \pmod{m}$ или $a \overset{m}{\equiv} b$.

Свойства

1.
   - $a \overset{m}{\equiv} a$.
   - Если $a \overset{m}{\equiv} b$, то $b \overset{m}{\equiv} a$.
   - Если $a \overset{m}{\equiv} b$ и $b \overset{m}{\equiv} c$, то $a \overset{m}{\equiv} c$.
2. Если $a \overset{m}{\equiv} b$, то $\bullet\, a+c \overset{m}{\equiv} b+c$, $\bullet\, ac \overset{m}{\equiv} bc$, $\bullet\, a^n \overset{m}{\equiv} b^n$.
3. Если $a_1 \overset{m}{\equiv} b_1$ и $a_2 \overset{m}{\equiv} b_2$, то $a_1+a_2 \overset{m}{\equiv} b_1+b_2$.
4. Если $a_1 \overset{m}{\equiv} b_1$ и $a_2 \overset{m}{\equiv} b_2$, то $a_1a_2 \overset{m}{\equiv} b_1b_2$.
5. Если $ac \overset{m}{\equiv} bc$ и НОД$(c,m)=1$, то $a \overset{m}{\equiv} b$.
6. Если $ac \overset{mc}{\equiv} bc$

Сравнимость по модулю

Числа a и b называются сравнимыми по модулю m, если $(a-b) \,\vdots\, m$.
Обозначения: $a \equiv b \pmod{m}$ или $a \overset{m}{\equiv} b$.

Свойства

1. - $a \overset{m}{\equiv} a$.
   - Если $a \overset{m}{\equiv} b$, то $b \overset{m}{\equiv} a$.
   - Если $a \overset{m}{\equiv} b$ и $b \overset{m}{\equiv} c$, то $a \overset{m}{\equiv} c$.
2. Если $a \overset{m}{\equiv} b$, то $\bullet\, a+c \overset{m}{\equiv} b+c$, $\bullet\, ac \overset{m}{\equiv} bc$, $\bullet\, a^n \overset{m}{\equiv} b^n$.
3. Если $a_1 \overset{m}{\equiv} b_1$ и $a_2 \overset{m}{\equiv} b_2$, то $a_1+a_2 \overset{m}{\equiv} b_1+b_2$.
4. Если $a_1 \overset{m}{\equiv} b_1$ и $a_2 \overset{m}{\equiv} b_2$, то $a_1a_2 \overset{m}{\equiv} b_1b_2$.
5. Если $ac \overset{m}{\equiv} bc$ и НОД$(c,m)=1$, то $a \overset{m}{\equiv} b$.
6. Если $ac \overset{mc}{\equiv} bc$, то $a \overset{m}{\equiv} b$.

Задача

Может ли разность двух полных квадратов равняться 2022?

Задача

Докажите, что $n^3 \overset{6}{\equiv} n$.

Задача

Докажите, что $n^3 + 5n$ делится на 6.

Задача

Докажите, что $n^5 \overset{6}{\equiv} n$.

Задача

Для a, b, $c \in \mathbb{Z}$ верно, что $a + b + c \,\vdots\, 6$. Докажите, что $a^3 + b^3 + c^3 \,\vdots\, 6$.

Задача

Докажите, что $n^{2021} \overset{6}{\equiv} n$.

Задача

Какое натуральное число, не более 2021, можно прибавить к числу $(2021^2-1)^{2020}(2021^2+1)^{2021}$, чтобы результат делился на 2021?

Задача

Найдётся ли натуральное n, при котором числа $(n^2-1)(n+1)^2$ и n^4 имеют одинаковую сумму цифр?

Задача

Делится ли число $2020^{2020} + 2021^{2021} + 2022^{2022}$ на 3?

Задача

Докажите, что $1^{2021} + 2^{2021} + 3^{2021} + \ldots + 2021^{2021}$ делится на 2021.

Задача

Докажите, что $(3^n + 1)^n - 2$ делится на $3^n - 2$.

Задача

Решите в целых числах уравнение: $2^x - 1 = 5^y$.

Задача

Решите в целых числах уравнение: $x^2 + y^2 + z^2 = 2021$.

Избранные задачи теории чисел

Богомолов Юрий Викторович

Ярославский региональный инновационно-образовательный центр «Новая школа»
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

25 января 2021 г.