Целочисленные и целозначные многочлены

Богомолов Юрий Викторович

Ярославский региональный инновационно-образовательный центр «Новая школа»
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

3 марта 2021 г.

Многочлен

Многочлен

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0).$$

Многочлен

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0).$$

Целочисленный многочлен

Многочлен

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0).$

Целочисленный многочлен

Многочлен называется *целочисленным*, если все его коэффициенты — целые числа.

Многочлен

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0).$

Целочисленный многочлен

Многочлен называется *целочисленным*, если все его коэффициенты — целые числа.

Целозначный многочлен

Многочлен

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0).$

Целочисленный многочлен

Многочлен называется *целочисленным*, если все его коэффициенты — целые числа.

Целозначный многочлен

Многочлен называется *целозначным*, если он принимает целые значения при всех целых значениях аргумента.

Задача

Приведите пример многочлена $P(x)$, который принимает целые значения при каждом целом x, но не все коэффициенты которого — целые числа.

Задача

Приведите пример многочлена $P(x)$, который принимает целые значения при каждом целом x, но не все коэффициенты которого — целые числа.

$$P(x) = \frac{x(x+1)}{2}$$

Задача

Приведите пример многочлена $P(x)$, который принимает целые значения при каждом целом x, но не все коэффициенты которого — целые числа.

$$P(x) = \frac{x(x+1)}{2}$$

$$P(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

Задача

Приведите пример многочлена $P(x)$, который принимает целые значения при каждом целом x, но не все коэффициенты которого — целые числа.

$$P(x) = \frac{x(x+1)}{2}$$

$$P(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

Подсказки:

Задача

Приведите пример многочлена $P(x)$, который принимает целые значения при каждом целом x, но не все коэффициенты которого — целые числа.

$$P(x) = \frac{x(x+1)}{2}$$

$$P(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

Подсказки:

1. Придумайте многочлен, у которого есть нецелые коэффициенты, но который принимает целые значения при *чётных* x.

Задача

Приведите пример многочлена $P(x)$, который принимает целые значения при каждом целом x, но не все коэффициенты которого — целые числа.

$$P(x) = \frac{x(x+1)}{2}$$

$$P(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

Подсказки:

1. Придумайте многочлен, у которого есть нецелые коэффициенты, но который принимает целые значения при *чётных* x.
2. Придумайте многочлен, у которого есть нецелые коэффициенты, но который принимает целые значения при *нечётных* x.

Задача

Существует ли такой квадратный трёхчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами a, b, c, что $P(2) = 5$ и $P(4) = 6$?

Задача

Существует ли такой квадратный трёхчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами a, b, c, что $P(2) = 5$ и $P(4) = 6$?

Предположим, что существует

Задача

Существует ли такой квадратный трёхчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами a, b, c, что $P(2) = 5$ и $P(4) = 6$?

Предположим, что существует. Тогда

Задача

Существует ли такой квадратный трёхчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами a, b, c, что $P(2) = 5$ и $P(4) = 6$?

Предположим, что существует. Тогда

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 5, \\ \end{cases}$$

Задача

Существует ли такой квадратный трёхчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами a, b, c, что $P(2) = 5$ и $P(4) = 6$?

Предположим, что существует. Тогда

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 5, \\ 16a + 4b + c = 6. \end{cases}$$

Задача

Существует ли такой квадратный трёхчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами a, b, c, что $P(2) = 5$ и $P(4) = 6$?

Предположим, что существует. Тогда

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 5, \\ 16a + 4b + c = 6. \end{cases}$$

Вычтем из второго равенства первое:

Задача

Существует ли такой квадратный трёхчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами a, b, c, что $P(2) = 5$ и $P(4) = 6$?

Предположим, что существует. Тогда

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 5, \\ 16a + 4b + c = 6. \end{cases}$$

Вычтем из второго равенства первое:

$12a + 2b = 1.$

Задача

Существует ли такой квадратный трёхчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами a, b, c, что $P(3) = 5$ и $P(5) = 16$?

Задача

Существует ли такой квадратный трёхчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами a, b, c, что $P(3) = 5$ и $P(5) = 16$?

Предположим, что существует. Тогда

Задача

Существует ли такой квадратный трёхчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами a, b, c, что $P(3) = 5$ и $P(5) = 16$?

Предположим, что существует. Тогда

$$\begin{cases} 9a + 3b + c = 5, \\ \end{cases}$$

Задача

Существует ли такой квадратный трёхчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами a, b, c, что $P(3) = 5$ и $P(5) = 16$?

Предположим, что существует. Тогда

$$\begin{cases} 9a + 3b + c = 5, \\ 25a + 5b + c = 16. \end{cases}$$

Задача

Существует ли такой квадратный трёхчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами a, b, c, что $P(3) = 5$ и $P(5) = 16$?

Предположим, что существует. Тогда

$$\begin{cases} 9a + 3b + c = 5, \\ 25a + 5b + c = 16. \end{cases}$$

Вычтем из второго равенства первое:

$$16a + 2b = 11.$$

Задача

Существует ли такой многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, что $P(3) = 5$ и $P(5) = 16$?

Задача

Существует ли такой многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, что $P(3) = 5$ и $P(5) = 16$?

Предположим, что существует $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Задача

Существует ли такой многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, что $P(3) = 5$ и $P(5) = 16$?

Предположим, что существует $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Тогда

$$\begin{cases} a_n \cdot 3^n + \ldots + a_2 \cdot 3^2 + a_1 \cdot 3 + a_0 = 5, \\ \end{cases}$$

Задача

Существует ли такой многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, что $P(3) = 5$ и $P(5) = 16$?

Предположим, что существует $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Тогда

$$\begin{cases} a_n \cdot 3^n + \ldots + a_2 \cdot 3^2 + a_1 \cdot 3 + a_0 = 5, \\ a_n \cdot 5^n + \ldots + a_2 \cdot 5^2 + a_1 \cdot 5 + a_0 = 16. \end{cases}$$

Задача

Существует ли такой многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, что $P(3) = 5$ и $P(5) = 16$?

Предположим, что существует $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Тогда

$$\begin{cases} a_n \cdot 3^n + \ldots + a_2 \cdot 3^2 + a_1 \cdot 3 + a_0 = 5, \\ a_n \cdot 5^n + \ldots + a_2 \cdot 5^2 + a_1 \cdot 5 + a_0 = 16. \end{cases}$$

Вычтем из второго равенства первое:

Задача

Существует ли такой многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, что $P(3) = 5$ и $P(5) = 16$?

Предположим, что существует $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Тогда

$$\begin{cases} a_n \cdot 3^n + \ldots + a_2 \cdot 3^2 + a_1 \cdot 3 + a_0 = 5, \\ a_n \cdot 5^n + \ldots + a_2 \cdot 5^2 + a_1 \cdot 5 + a_0 = 16. \end{cases}$$

Вычтем из второго равенства первое:

$$a_n \cdot (5^n - 3^n) + \ldots + a_2 \cdot (5^2 - 3^2) + a_1 \cdot (5 - 3) = 11.$$

Теорема Безу для целочисленных многочленов

Все коэффициенты многочлена $P(x)$ целые. Докажите, что для любых целых b и c значение $P(b) - P(c)$ делится на $b - c$.

Теорема Безу для целочисленных многочленов

Все коэффициенты многочлена $P(x)$ целые. Докажите, что для любых целых b и c значение $P(b) - P(c)$ делится на $b - c$.

Подставим b и c в многочлен:

$$\begin{cases} P(b) = a_n \cdot b^n + \ldots + a_2 \cdot b^2 + a_1 \cdot b + a_0, \\ \end{cases}$$

Теорема Безу для целочисленных многочленов

Все коэффициенты многочлена $P(x)$ целые. Докажите, что для любых целых b и c значение $P(b) - P(c)$ делится на $b - c$.

Подставим b и c в многочлен:

$$\begin{cases} P(b) = a_n \cdot b^n + \ldots + a_2 \cdot b^2 + a_1 \cdot b + a_0, \\ P(c) = a_n \cdot c^n + \ldots + a_2 \cdot c^2 + a_1 \cdot c + a_0. \end{cases}$$

Теорема Безу для целочисленных многочленов

Все коэффициенты многочлена $P(x)$ целые. Докажите, что для любых целых b и c значение $P(b) - P(c)$ делится на $b - c$.

Подставим b и c в многочлен:

$$\begin{cases} P(b) = a_n \cdot b^n + \ldots + a_2 \cdot b^2 + a_1 \cdot b + a_0, \\ P(c) = a_n \cdot c^n + \ldots + a_2 \cdot c^2 + a_1 \cdot c + a_0. \end{cases}$$

Вычтем из первого равенства второе:

Теорема Безу для целочисленных многочленов

Все коэффициенты многочлена $P(x)$ целые. Докажите, что для любых целых b и c значение $P(b) - P(c)$ делится на $b - c$.

Подставим b и c в многочлен:

$$\begin{cases} P(b) = a_n \cdot b^n + \ldots + a_2 \cdot b^2 + a_1 \cdot b + a_0, \\ P(c) = a_n \cdot c^n + \ldots + a_2 \cdot c^2 + a_1 \cdot c + a_0. \end{cases}$$

Вычтем из первого равенства второе:

$$P(b) - P(c) = a_n \cdot (b^n - c^n) + \ldots + a_2 \cdot (b^2 - c^2) + a_1 \cdot (b - c).$$

Теорема Безу для целочисленных многочленов

Все коэффициенты многочлена $P(x)$ целые. Докажите, что для любых целых b и c значение $P(b) - P(c)$ делится на $b - c$.

Подставим b и c в многочлен:

$$\begin{cases} P(b) = a_n \cdot b^n + \ldots + a_2 \cdot b^2 + a_1 \cdot b + a_0, \\ P(c) = a_n \cdot c^n + \ldots + a_2 \cdot c^2 + a_1 \cdot c + a_0. \end{cases}$$

Вычтем из первого равенства второе:

$$P(b) - P(c) = a_n \cdot (b^n - c^n) + \ldots + a_2 \cdot (b^2 - c^2) + a_1 \cdot (b - c).$$

Полезный факт: $b^k - c^k$ делится на $b - c$.

Теорема Безу для целочисленных многочленов

Все коэффициенты многочлена $P(x)$ целые. Докажите, что для любых целых b и c значение $P(b) - P(c)$ делится на $b - c$.

Подставим b и c в многочлен:

$$\begin{cases} P(b) = a_n \cdot b^n + \ldots + a_2 \cdot b^2 + a_1 \cdot b + a_0, \\ P(c) = a_n \cdot c^n + \ldots + a_2 \cdot c^2 + a_1 \cdot c + a_0. \end{cases}$$

Вычтем из первого равенства второе:

$$P(b) - P(c) = a_n \cdot (b^n - c^n) + \ldots + a_2 \cdot (b^2 - c^2) + a_1 \cdot (b - c).$$

Полезный факт: $b^k - c^k$ делится на $b - c$.

$$b^k - c^k = (b - c)(b^{k-1} + b^{k-2}c + b^{k-3}c^2 + \ldots + bc^{k-2} + c^{k-1})$$

Задача

Существует ли такой квадратный трёхчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами a, b, c, что $P(3) = 5$ и $P(5) = 16$?

Задача

Существует ли такой квадратный трёхчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами a, b, c, что $P(3) = 5$ и $P(5) = 16$?

$$P(5) - P(3) = 16 - 5 = 11$$

Задача

Существует ли такой квадратный трёхчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами a, b, c, что $P(3) = 5$ и $P(5) = 16$?

$P(5) - P(3) = 16 - 5 = 11$ — не делится на $5 - 3 = 2$.

Задача

Существует ли такой многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, что $P(13) = 2021$ и $P(20) = 13$?

Задача

Существует ли такой многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, что $P(13) = 2021$ и $P(20) = 13$?

$$P(20) - P(13) = 2021 - 13 = 2008$$

Задача

Существует ли такой многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, что $P(13) = 2021$ и $P(20) = 13$?

$P(20) - P(13) = 2021 - 13 = 2008$ — не делится на $20 - 13 = 7$.

Задача

Существует ли такой многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, что $P(13) = 2021$ и $P(2021) = 13$?

Задача

Существует ли такой многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, что $P(13) = 2021$ и $P(2021) = 13$?

$$P(2021) - P(13) = 13 - 2021 = -2008$$

Задача

Существует ли такой многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, что $P(13) = 2021$ и $P(2021) = 13$?

$P(2021) - P(13) = 13 - 2021 = -2008$ — делится на $2021 - 13 = 2008$

Задача

Существует ли такой многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, что $P(13) = 2021$ и $P(2021) = 13$?

$P(2021) - P(13) = 13 - 2021 = -2008$ — делится на $2021 - 13 = 2008$ — пока нет противоречия.

Задача

Существует ли такой многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, что $P(13) = 2021$ и $P(2021) = 13$?

$P(2021) - P(13) = 13 - 2021 = -2008$ — делится на $2021 - 13 = 2008$ — пока нет противоречия.

Поищем в виде $P(x) = kx + b$.

Задача

Существует ли такой многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, что $P(13) = 2021$ и $P(2021) = 13$?

$P(2021) - P(13) = 13 - 2021 = -2008$ — делится на $2021 - 13 = 2008$ — пока нет противоречия.

Поищем в виде $P(x) = kx + b$.

$$\begin{cases} 13k + b = 2021, \\ \end{cases}$$

Задача

Существует ли такой многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, что $P(13) = 2021$ и $P(2021) = 13$?

$P(2021) - P(13) = 13 - 2021 = -2008$ — делится на $2021 - 13 = 2008$ — пока нет противоречия.

Поищем в виде $P(x) = kx + b$.

$$\begin{cases} 13k + b = 2021, \\ 2021k + b = 13. \end{cases}$$

Задача

Существует ли такой многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, что $P(13) = 2021$ и $P(2021) = 13$?

$P(2021) - P(13) = 13 - 2021 = -2008$ — делится на $2021 - 13 = 2008$ — пока нет противоречия.

Поищем в виде $P(x) = kx + b$.

$$\begin{cases} 13k + b = 2021, \\ 2021k + b = 13. \end{cases}$$

Вычтем из второго равенства первое:

$2008k = -2008$

Задача

Существует ли такой многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, что $P(13) = 2021$ и $P(2021) = 13$?

$P(2021) - P(13) = 13 - 2021 = -2008$ — делится на $2021 - 13 = 2008$ — пока нет противоречия.

Поищем в виде $P(x) = kx + b$.

$$\begin{cases} 13k + b = 2021, \\ 2021k + b = 13. \end{cases}$$

Вычтем из второго равенства первое:

$2008k = -2008$ — откуда $k = -1$.

Задача

Существует ли такой многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, что $P(13) = 2021$ и $P(2021) = 13$?

$P(2021) - P(13) = 13 - 2021 = -2008$ — делится на $2021 - 13 = 2008$ — пока нет противоречия.

Поищем в виде $P(x) = kx + b$.

$$\begin{cases} 13k + b = 2021, \\ 2021k + b = 13. \end{cases}$$

Вычтем из второго равенства первое:

$2008k = -2008$ — откуда $k = -1$.

Теперь подставим в первое уравнение:

$-13 + b = 2021$

Задача

Существует ли такой многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, что $P(13) = 2021$ и $P(2021) = 13$?

$P(2021) - P(13) = 13 - 2021 = -2008$ — делится на $2021 - 13 = 2008$ — пока нет противоречия.

Поищем в виде $P(x) = kx + b$.

$$\begin{cases} 13k + b = 2021, \\ 2021k + b = 13. \end{cases}$$

Вычтем из второго равенства первое:

$2008k = -2008$ — откуда $k = -1$.

Теперь подставим в первое уравнение:

$-13 + b = 2021$ — откуда $b = 2034$

Задача

Существует ли такой многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, что $P(13) = 2021$ и $P(2021) = 13$?

$P(2021) - P(13) = 13 - 2021 = -2008$ — делится на $2021 - 13 = 2008$ — пока нет противоречия.

Поищем в виде $P(x) = kx + b$.

$$\begin{cases} 13k + b = 2021, \\ 2021k + b = 13. \end{cases}$$

Вычтем из второго равенства первое:

$2008k = -2008$ — откуда $k = -1$.

Теперь подставим в первое уравнение:

$-13 + b = 2021$ — откуда $b = 2034$ — тогда $P(x) = 2034 - x$.

Вернёмся к старой задаче

Приведите пример многочлена $P(x)$, который принимает целые значения при каждом целом x, но не все коэффициенты которого — целые числа.

Вернёмся к старой задаче

Приведите пример многочлена $P(x)$, который принимает целые значения при каждом целом x, но не все коэффициенты которого — целые числа.

Новая задача

Многочлен $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$ принимает целые значения при каждом целом x

Вернёмся к старой задаче

Приведите пример многочлена $P(x)$, который принимает целые значения при каждом целом x, но не все коэффициенты которого — целые числа.

Новая задача

Многочлен $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$ принимает целые значения при каждом целом x. Могут ли все его коэффициенты не быть целыми числами?

Вернёмся к старой задаче

Приведите пример многочлена $P(x)$, который принимает целые значения при каждом целом x, но не все коэффициенты которого — целые числа.

Новая задача

Многочлен $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$ принимает целые значения при каждом целом x. Могут ли все его коэффициенты не быть целыми числами?

$P(0) = a_0$ — целое число (по условию).

Задача

Квадратный трехчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$ принимает целые значения при всех целых x. Докажите, что числа $2a$, $a + b$ и c — целые.

Задача

Квадратный трехчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$ принимает целые значения при всех целых x. Докажите, что числа $2a$, $a + b$ и c — целые.

Рассмотрим $x = 0$

Задача

Квадратный трехчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$ принимает целые значения при всех целых x. Докажите, что числа $2a$, $a + b$ и c — целые.

Рассмотрим $x = 0$: $\quad P(0) = c$ — целое число.

Задача

Квадратный трехчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$ принимает целые значения при всех целых x. Докажите, что числа $2a$, $a + b$ и c — целые.

Рассмотрим $x = 0$: $\quad P(0) = c$ — целое число.

Рассмотрим $x = 1$

Задача

Квадратный трехчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$ принимает целые значения при всех целых x. Докажите, что числа $2a$, $a + b$ и c — целые.

Рассмотрим $x = 0$: $\quad P(0) = c$ — целое число.

Рассмотрим $x = 1$: $\quad P(1) = a + b + c$ — целое

Задача

Квадратный трехчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$ принимает целые значения при всех целых x. Докажите, что числа $2a$, $a + b$ и c — целые.

Рассмотрим $x = 0$: $P(0) = c$ — целое число.

Рассмотрим $x = 1$: $P(1) = a + b + c$ — целое. Так как c — целое, то и $a + b$ — целое.

Задача

Квадратный трехчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$ принимает целые значения при всех целых x. Докажите, что числа $2a$, $a + b$ и c — целые.

Рассмотрим $x = 0$: $\quad P(0) = c$ — целое число.

Рассмотрим $x = 1$: $\quad P(1) = a + b + c$ — целое. Так как c — целое, то и $a + b$ — целое.

Рассмотрим $x = -1$: $\quad P(-1) = a - b + c$ — целое

Задача

Квадратный трехчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$ принимает целые значения при всех целых x. Докажите, что числа $2a$, $a + b$ и c — целые.

Рассмотрим $x = 0$: $P(0) = c$ — целое число.

Рассмотрим $x = 1$: $P(1) = a + b + c$ — целое. Так как c — целое, то и $a + b$ — целое.

Рассмотрим $x = -1$: $P(-1) = a - b + c$ — целое. Сложим с $P(1)$:

$$P(1) + P(-1) = (a + b + c) + (a - b + c)$$

Задача

Квадратный трехчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$ принимает целые значения при всех целых x. Докажите, что числа $2a$, $a + b$ и c — целые.

Рассмотрим $x = 0$: $\quad P(0) = c$ — целое число.

Рассмотрим $x = 1$: $\quad P(1) = a + b + c$ — целое. Так как c — целое, то и $a + b$ — целое.

Рассмотрим $x = -1$: $\quad P(-1) = a - b + c$ — целое. Сложим с $P(1)$:

$P(1) + P(-1) = (a + b + c) + (a - b + c) = 2a + 2c$ — целое число

Задача

Квадратный трехчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$ принимает целые значения при всех целых x. Докажите, что числа $2a$, $a + b$ и c — целые.

Рассмотрим $x = 0$: $\quad P(0) = c$ — целое число.

Рассмотрим $x = 1$: $\quad P(1) = a + b + c$ — целое. Так как c — целое, то и $a + b$ — целое.

Рассмотрим $x = -1$: $\quad P(-1) = a - b + c$ — целое. Сложим с $P(1)$:

$P(1) + P(-1) = (a + b + c) + (a - b + c) = 2a + 2c$ — целое число. Так как c — целое, то и $2a$ — целое.

Задача

Известно, что числа $2a$, $a+b$ и c — целые. Докажите, что квадратный трехчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$ принимает целые значения при всех целых x.

Задача

Известно, что числа $2a$, $a+b$ и c — целые. Докажите, что квадратный трехчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$ принимает целые значения при всех целых x.

$$P(x) = ax^2 + bx + c =$$

Задача

Известно, что числа $2a$, $a+b$ и c — целые. Докажите, что квадратный трехчлен $P(x)=ax^2+bx+c$ принимает целые значения при всех целых x.

$$P(x)=ax^2+bx+c=2a\cdot\frac{x^2}{2}$$

Задача

Известно, что числа $2a$, $a+b$ и c — целые. Докажите, что квадратный трехчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$ принимает целые значения при всех целых x.

$$P(x) = ax^2 + bx + c = 2a \cdot \frac{x^2}{2} + bx + c$$

Задача

Известно, что числа $2a$, $a+b$ и c — целые. Докажите, что квадратный трехчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$ принимает целые значения при всех целых x.

$P(x) = ax^2 + bx + c = 2a \cdot \dfrac{x^2}{2} + bx + c$ — неудачный выбор.

Задача

Известно, что числа $2a$, $a+b$ и c — целые. Докажите, что квадратный трехчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$ принимает целые значения при всех целых x.

$P(x) = ax^2 + bx + c = 2a \cdot \dfrac{x^2}{2} + bx + c$ — неудачный выбор.

$$P(x) = ax^2 + bx + c = 2a \cdot \frac{x(x+1)}{2}$$

Задача

Известно, что числа $2a$, $a+b$ и c — целые. Докажите, что квадратный трехчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$ принимает целые значения при всех целых x.

$P(x) = ax^2 + bx + c = 2a \cdot \dfrac{x^2}{2} + bx + c$ — неудачный выбор.

$$P(x) = ax^2 + bx + c = 2a \cdot \frac{x(x+1)}{2} - ax + bx + c$$

Задача

Известно, что числа $2a$, $a+b$ и c — целые. Докажите, что квадратный трехчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$ принимает целые значения при всех целых x.

$P(x) = ax^2 + bx + c = 2a \cdot \dfrac{x^2}{2} + bx + c$ — неудачный выбор.

$P(x) = ax^2 + bx + c = 2a \cdot \dfrac{x(x+1)}{2} - ax + bx + c$ — уже лучше.

Задача

Известно, что числа $2a$, $a+b$ и c — целые. Докажите, что квадратный трехчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$ принимает целые значения при всех целых x.

$P(x) = ax^2 + bx + c = 2a \cdot \dfrac{x^2}{2} + bx + c$ — неудачный выбор.

$P(x) = ax^2 + bx + c = 2a \cdot \dfrac{x(x+1)}{2} - ax + bx + c$ — уже лучше.

$$P(x) = ax^2 + bx + c = 2a \cdot \frac{x(x-1)}{2}$$

Задача

Известно, что числа $2a$, $a+b$ и c — целые. Докажите, что квадратный трехчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$ принимает целые значения при всех целых x.

$P(x) = ax^2 + bx + c = 2a \cdot \dfrac{x^2}{2} + bx + c$ — неудачный выбор.

$P(x) = ax^2 + bx + c = 2a \cdot \dfrac{x(x+1)}{2} - ax + bx + c$ — уже лучше.

$$P(x) = ax^2 + bx + c = 2a \cdot \frac{x(x-1)}{2} + ax + bx + c$$

Задача

Известно, что числа $2a$, $a+b$ и c — целые. Докажите, что квадратный трехчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$ принимает целые значения при всех целых x.

$$P(x) = ax^2 + bx + c = 2a \cdot \frac{x^2}{2} + bx + c$$ — неудачный выбор.

$$P(x) = ax^2 + bx + c = 2a \cdot \frac{x(x+1)}{2} - ax + bx + c$$ — уже лучше.

$$P(x) = ax^2 + bx + c = 2a \cdot \frac{x(x-1)}{2} + ax + bx + c$$ — хорошо.

Задача

Известно, что числа $2a$, $a+b$ и c — целые. Докажите, что квадратный трехчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$ принимает целые значения при всех целых x.

$$P(x) = ax^2 + bx + c = 2a \cdot \frac{x^2}{2} + bx + c$$ — неудачный выбор.

$$P(x) = ax^2 + bx + c = 2a \cdot \frac{x(x+1)}{2} - ax + bx + c$$ — уже лучше.

$$P(x) = ax^2 + bx + c = 2a \cdot \frac{x(x-1)}{2} + ax + bx + c$$ — хорошо.

$$P(x) = ax^2 + bx + c = 2a \cdot \frac{x(x-1)}{2} + (a+b)x + c.$$

Задача

Многочлен $ax^3 + bx^2 + cx + d$, где a, b, c, d — целые числа, при любом целом x делится на 5. Докажите, что все числа a, b, c, d делятся на 5.

Задача

Многочлен $ax^3 + bx^2 + cx + d$, где a, b, c, d — целые числа, при любом целом x делится на 5. Докажите, что все числа a, b, c, d делятся на 5.

$P(0) = d \,\vdots\, 5$

Задача

Многочлен $ax^3 + bx^2 + cx + d$, где a, b, c, d — целые числа, при любом целом x делится на 5. Докажите, что все числа a, b, c, d делятся на 5.

$$P(0) = d \,\vdots\, 5$$

$$P(1) = a + b + c + d \,\vdots\, 5$$

Задача

Многочлен $ax^3 + bx^2 + cx + d$, где a, b, c, d — целые числа, при любом целом x делится на 5. Докажите, что все числа a, b, c, d делятся на 5.

$$P(0) = d \,\vdots\, 5$$

$$P(1) = a + b + c + d \,\vdots\, 5 \quad \Rightarrow \quad a + b + c \,\vdots\, 5.$$

Задача

Многочлен $ax^3 + bx^2 + cx + d$, где a, b, c, d — целые числа, при любом целом x делится на 5. Докажите, что все числа a, b, c, d делятся на 5.

$$P(0) = d \,\vdots\, 5$$

$$P(1) = a + b + c + d \,\vdots\, 5 \quad \Rightarrow \quad a + b + c \,\vdots\, 5.$$

$$P(-1) = -a + b - c + d \,\vdots\, 5$$

Задача

Многочлен $ax^3 + bx^2 + cx + d$, где a, b, c, d — целые числа, при любом целом x делится на 5. Докажите, что все числа a, b, c, d делятся на 5.

$$P(0) = d \vdots 5$$

$$P(1) = a + b + c + d \vdots 5 \quad \Rightarrow \quad a + b + c \vdots 5.$$

$$P(-1) = -a + b - c + d \vdots 5 \quad \Rightarrow \quad -a + b - c \vdots 5.$$

Задача

Многочлен $ax^3 + bx^2 + cx + d$, где a, b, c, d — целые числа, при любом целом x делится на 5. Докажите, что все числа a, b, c, d делятся на 5.

$$P(0) = d \,\vdots\, 5$$

$$P(1) = a + b + c + d \,\vdots\, 5 \quad \Rightarrow \quad a + b + c \,\vdots\, 5.$$

$$P(-1) = -a + b - c + d \,\vdots\, 5 \quad \Rightarrow \quad -a + b - c \,\vdots\, 5.$$

$$(a + b + c) + (-a + b - c) = 2b \,\vdots\, 5$$

Задача

Многочлен $ax^3 + bx^2 + cx + d$, где a, b, c, d — целые числа, при любом целом x делится на 5. Докажите, что все числа a, b, c, d делятся на 5.

$$P(0) = d \vdots 5$$

$$P(1) = a + b + c + d \vdots 5 \quad \Rightarrow \quad a + b + c \vdots 5.$$

$$P(-1) = -a + b - c + d \vdots 5 \quad \Rightarrow \quad -a + b - c \vdots 5.$$

$$(a + b + c) + (-a + b - c) = 2b \vdots 5 \quad \Rightarrow \quad b \vdots 5$$

Задача

Многочлен $ax^3 + bx^2 + cx + d$, где a, b, c, d — целые числа, при любом целом x делится на 5. Докажите, что все числа a, b, c, d делятся на 5.

$$P(0) = d \vdots 5$$

$$P(1) = a + b + c + d \vdots 5 \quad \Rightarrow \quad a + b + c \vdots 5.$$

$$P(-1) = -a + b - c + d \vdots 5 \quad \Rightarrow \quad -a + b - c \vdots 5.$$

$$(a + b + c) + (-a + b - c) = 2b \vdots 5 \quad \Rightarrow \quad b \vdots 5 \quad \Rightarrow \quad a + c \vdots 5.$$

Задача

Многочлен ax^3+bx^2+cx+d, где a, b, c, d — целые числа, при любом целом x делится на 5. Докажите, что все числа a, b, c, d делятся на 5.

$$P(0)=d \vdots 5$$

$$P(1)=a+b+c+d \vdots 5 \quad \Rightarrow \quad a+b+c \vdots 5.$$

$$P(-1)=-a+b-c+d \vdots 5 \quad \Rightarrow \quad -a+b-c \vdots 5.$$

$$(a+b+c)+(-a+b-c)=2b \vdots 5 \quad \Rightarrow \quad b \vdots 5 \quad \Rightarrow \quad a+c \vdots 5.$$

$$P(2)=8a+4b+2c+d \vdots 5,$$

Задача

Многочлен $ax^3 + bx^2 + cx + d$, где a, b, c, d — целые числа, при любом целом x делится на 5. Докажите, что все числа a, b, c, d делятся на 5.

$$P(0) = d \vdots 5$$

$$P(1) = a + b + c + d \vdots 5 \quad \Rightarrow \quad a + b + c \vdots 5.$$

$$P(-1) = -a + b - c + d \vdots 5 \quad \Rightarrow \quad -a + b - c \vdots 5.$$

$$(a + b + c) + (-a + b - c) = 2b \vdots 5 \quad \Rightarrow \quad b \vdots 5 \quad \Rightarrow \quad a + c \vdots 5.$$

$$P(2) = 8a + 4b + 2c + d \vdots 5, \quad b, d \vdots 5$$

Задача

Многочлен $ax^3 + bx^2 + cx + d$, где a, b, c, d — целые числа, при любом целом x делится на 5. Докажите, что все числа a, b, c, d делятся на 5.

$$P(0) = d \,\vdots\, 5$$

$$P(1) = a + b + c + d \,\vdots\, 5 \quad \Rightarrow \quad a + b + c \,\vdots\, 5.$$

$$P(-1) = -a + b - c + d \,\vdots\, 5 \quad \Rightarrow \quad -a + b - c \,\vdots\, 5.$$

$$(a + b + c) + (-a + b - c) = 2b \,\vdots\, 5 \quad \Rightarrow \quad b \,\vdots\, 5 \quad \Rightarrow \quad a + c \,\vdots\, 5.$$

$$P(2) = 8a + 4b + 2c + d \,\vdots\, 5, \quad b, d \,\vdots\, 5 \quad \Rightarrow \quad 8a + 2c \,\vdots\, 5$$

Задача

Многочлен $ax^3 + bx^2 + cx + d$, где a, b, c, d — целые числа, при любом целом x делится на 5. Докажите, что все числа a, b, c, d делятся на 5.

$$P(0) = d \,\vdots\, 5$$

$$P(1) = a + b + c + d \,\vdots\, 5 \quad \Rightarrow \quad a + b + c \,\vdots\, 5.$$

$$P(-1) = -a + b - c + d \,\vdots\, 5 \quad \Rightarrow \quad -a + b - c \,\vdots\, 5.$$

$$(a + b + c) + (-a + b - c) = 2b \,\vdots\, 5 \quad \Rightarrow \quad b \,\vdots\, 5 \quad \Rightarrow \quad a + c \,\vdots\, 5.$$

$$P(2) = 8a + 4b + 2c + d \,\vdots\, 5, \quad b, d \,\vdots\, 5 \quad \Rightarrow \quad 8a + 2c \,\vdots\, 5 \quad \Rightarrow \quad 4a + c \,\vdots\, 5.$$

Задача

Многочлен $ax^3 + bx^2 + cx + d$, где a, b, c, d — целые числа, при любом целом x делится на 5. Докажите, что все числа a, b, c, d делятся на 5.

$$P(0) = d \,\vdots\, 5$$

$$P(1) = a + b + c + d \,\vdots\, 5 \quad \Rightarrow \quad a + b + c \,\vdots\, 5.$$

$$P(-1) = -a + b - c + d \,\vdots\, 5 \quad \Rightarrow \quad -a + b - c \,\vdots\, 5.$$

$$(a + b + c) + (-a + b - c) = 2b \,\vdots\, 5 \quad \Rightarrow \quad b \,\vdots\, 5 \quad \Rightarrow \quad a + c \,\vdots\, 5.$$

$$P(2) = 8a + 4b + 2c + d \,\vdots\, 5, \quad b, d \,\vdots\, 5 \quad \Rightarrow \quad 8a + 2c \,\vdots\, 5 \quad \Rightarrow \quad 4a + c \,\vdots\, 5.$$

$$(4a + c) - (a + c) = 3a \,\vdots\, 5$$

Задача

Многочлен $ax^3 + bx^2 + cx + d$, где a, b, c, d — целые числа, при любом целом x делится на 5. Докажите, что все числа a, b, c, d делятся на 5.

$$P(0) = d \vdots 5$$

$$P(1) = a + b + c + d \vdots 5 \quad \Rightarrow \quad a + b + c \vdots 5.$$

$$P(-1) = -a + b - c + d \vdots 5 \quad \Rightarrow \quad -a + b - c \vdots 5.$$

$$(a + b + c) + (-a + b - c) = 2b \vdots 5 \quad \Rightarrow \quad b \vdots 5 \quad \Rightarrow \quad a + c \vdots 5.$$

$$P(2) = 8a + 4b + 2c + d \vdots 5, \quad b, d \vdots 5 \quad \Rightarrow \quad 8a + 2c \vdots 5 \quad \Rightarrow \quad 4a + c \vdots 5.$$

$$(4a + c) - (a + c) = 3a \vdots 5 \quad \Rightarrow \quad a \vdots 5$$

Задача

Многочлен ax^3+bx^2+cx+d, где a, b, c, d — целые числа, при любом целом x делится на 5. Докажите, что все числа a, b, c, d делятся на 5.

$$P(0)=d \,\vdots\, 5$$

$$P(1)=a+b+c+d \,\vdots\, 5 \quad\Rightarrow\quad a+b+c \,\vdots\, 5.$$

$$P(-1)=-a+b-c+d \,\vdots\, 5 \quad\Rightarrow\quad -a+b-c \,\vdots\, 5.$$

$$(a+b+c)+(-a+b-c)=2b \,\vdots\, 5 \quad\Rightarrow\quad b \,\vdots\, 5 \quad\Rightarrow\quad a+c \,\vdots\, 5.$$

$$P(2)=8a+4b+2c+d \,\vdots\, 5, \quad b,d \,\vdots\, 5 \quad\Rightarrow\quad 8a+2c \,\vdots\, 5 \quad\Rightarrow\quad 4a+c \,\vdots\, 5.$$

$$(4a+c)-(a+c)=3a \,\vdots\, 5 \quad\Rightarrow\quad a \,\vdots\, 5 \quad\Rightarrow\quad c \,\vdots\, 5.$$

Задача

Многочлен $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, где a, b, c, d, e — целые числа, при любом целом x делится на 7. Докажите, что все числа a, b, c, d, e делятся на 7.

Задача

Докажите, что не существует квадратного трёхчлена $P(x) = ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами, значения которого при всех $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$ являются простыми числами.

Задача

Докажите, что не существует квадратного трёхчлена $P(x) = ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами, значения которого при всех $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$ являются простыми числами.

$P(0) = c$ — простое число

Задача

Докажите, что не существует квадратного трёхчлена $P(x) = ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами, значения которого при всех $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$ являются простыми числами.

$P(0) = c$ — простое число (обозначим $c = p$

Задача

Докажите, что не существует квадратного трёхчлена $P(x) = ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами, значения которого при всех $x = 0, 1, 2, 3, \dots$ являются простыми числами.

$P(0) = c$ — простое число (обозначим $c = p$, $P(x) = ax^2 + bx + p$).

Задача

Докажите, что не существует квадратного трёхчлена $P(x) = ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами, значения которого при всех $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$ являются простыми числами.

$P(0) = c$ — простое число (обозначим $c = p$, $P(x) = ax^2 + bx + p$).

$P(p) = ap^2 + bp + p$

Задача

Докажите, что не существует квадратного трёхчлена $P(x) = ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами, значения которого при всех $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$ являются простыми числами.

$P(0) = c$ — простое число (обозначим $c = p$, $P(x) = ax^2 + bx + p$).

$P(p) = ap^2 + bp + p \,\vdots\, p$

Задача

Докажите, что не существует квадратного трёхчлена $P(x) = ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами, значения которого при всех $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$ являются простыми числами.

$P(0) = c$ — простое число (обозначим $c = p$, $P(x) = ax^2 + bx + p$).

$P(p) = ap^2 + bp + p \,\vdots\, p \quad \Rightarrow \quad P(p) = p$.

Задача

Докажите, что не существует квадратного трёхчлена $P(x) = ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами, значения которого при всех $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$ являются простыми числами.

$P(0) = c$ — простое число (обозначим $c = p$, $P(x) = ax^2 + bx + p$).

$P(p) = ap^2 + bp + p \;\vdots\; p \quad \Rightarrow \quad P(p) = p.$

$P(2p) = a \cdot 4p^2 + b \cdot 2p + p$

Задача

Докажите, что не существует квадратного трёхчлена $P(x) = ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами, значения которого при всех $x = 0, 1, 2, 3, \dots$ являются простыми числами.

$P(0) = c$ — простое число (обозначим $c = p$, $P(x) = ax^2 + bx + p$).

$P(p) = ap^2 + bp + p \,\vdots\, p \quad \Rightarrow \quad P(p) = p.$

$P(2p) = a \cdot 4p^2 + b \cdot 2p + p \,\vdots\, p \quad \Rightarrow \quad P(2p) = p.$

Задача

Докажите, что не существует квадратного трёхчлена $P(x) = ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами, значения которого при всех $x = 0, 1, 2, 3, \dots$ являются простыми числами.

$P(0) = c$ — простое число (обозначим $c = p$, $P(x) = ax^2 + bx + p$).

$$P(p) = ap^2 + bp + p \,\vdots\, p \quad \Rightarrow \quad P(p) = p.$$

$$P(2p) = a \cdot 4p^2 + b \cdot 2p + p \,\vdots\, p \quad \Rightarrow \quad P(2p) = p.$$

$P(0) = P(p) = P(2p) = p$ — так не бывает.

Задача

Докажите, что не существует квадратного трёхчлена $P(x) = ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами, значения которого при всех $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$ являются простыми числами.

$P(0) = c$ — простое число (обозначим $c = p$, $P(x) = ax^2 + bx + p$).

$P(p) = ap^2 + bp + p \,\vdots\, p \quad \Rightarrow \quad P(p) = p.$

$P(2p) = a \cdot 4p^2 + b \cdot 2p + p \,\vdots\, p \quad \Rightarrow \quad P(2p) = p.$

$P(0) = P(p) = P(2p) = p$ — так не бывает.

Или так: пусть $Q(x) = P(x) - p$

Задача

Докажите, что не существует квадратного трёхчлена $P(x) = ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами, значения которого при всех $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$ являются простыми числами.

$P(0) = c$ — простое число (обозначим $c = p$, $P(x) = ax^2 + bx + p$).

$$P(p) = ap^2 + bp + p \,\vdots\, p \quad \Rightarrow \quad P(p) = p.$$

$$P(2p) = a \cdot 4p^2 + b \cdot 2p + p \,\vdots\, p \quad \Rightarrow \quad P(2p) = p.$$

$P(0) = P(p) = P(2p) = p$ — так не бывает.

Или так: пусть $Q(x) = P(x) - p$ — квадратный трёхчлен.

Задача

Докажите, что не существует квадратного трёхчлена $P(x) = ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами, значения которого при всех $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$ являются простыми числами.

$P(0) = c$ — простое число (обозначим $c = p$, $P(x) = ax^2 + bx + p$).

$P(p) = ap^2 + bp + p \,\vdots\, p \quad \Rightarrow \quad P(p) = p$.

$P(2p) = a \cdot 4p^2 + b \cdot 2p + p \,\vdots\, p \quad \Rightarrow \quad P(2p) = p$.

$P(0) = P(p) = P(2p) = p$ — так не бывает.

Или так: пусть $Q(x) = P(x) - p$ — квадратный трёхчлен.
Но $Q(0) = Q(p) = Q(2p) = 0$

Задача

Докажите, что не существует квадратного трёхчлена $P(x) = ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами, значения которого при всех $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$ являются простыми числами.

$P(0) = c$ — простое число (обозначим $c = p$, $P(x) = ax^2 + bx + p$).

$P(p) = ap^2 + bp + p \vdots p \quad \Rightarrow \quad P(p) = p.$

$P(2p) = a \cdot 4p^2 + b \cdot 2p + p \vdots p \quad \Rightarrow \quad P(2p) = p.$

$P(0) = P(p) = P(2p) = p$ — так не бывает.

Или так: пусть $Q(x) = P(x) - p$ — квадратный трёхчлен.
Но $Q(0) = Q(p) = Q(2p) = 0$ — у квадратного трёхчлена три корня?

Задача

Докажите, что не существует многочлена $P(x)$ (степени не ниже первой) с целыми коэффициентами, значения которого при всех $x = 0, 1, 2, 3, \dots$ являются простыми числами.

О чём поговорить: рациональные корни и коэффициенты

Пусть $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, где все $a_i \in \mathbb{Z}$.
Пусть $x_0 = \dfrac{p}{q}$ — корень $P(x)$ (здесь p и q — целые взаимно простые числа). Тогда $a_0 \mathrel{\vdots} p$ и $a_n \mathrel{\vdots} q$.

О чём поговорить: приводимость и неприводимость

Докажите, что $x^3 + 2x + 5$ нельзя разложить в произведение многочленов с целыми коэффициентами.

О чём поговорить: приводимость и неприводимость

Докажите, что $x^3 + 2x + 5$ нельзя разложить в произведение многочленов с целыми коэффициентами.

О чём поговорить: приводимость и неприводимость

Разложите $x^4 + 4$ в произведение двух многочленов с целыми коэффициентами.

О чём поговорить: интерполяция

Многочлен в рациональных точках принимает рациональные значения. Докажите, что все его коэффициенты рациональны.

О чём поговорить: интерполяция

Многочлен в рациональных точках принимает рациональные значения. Докажите, что все его коэффициенты рациональны.

О чём поговорить: интерполяция

Многочлен $P(x)$ степени n принимает целые значения при $x = 0, 1, 2, \ldots, n$. Докажите, что он принимает целые значения при любом целом значении n.

О чём поговорить: многочлены Чебышева

Докажите, что для любого целого $n \geqslant 0$ существует такой многочлен $T_n(x)$, что $\cos nx = T_n(\cos x)$.

О чём поговорить: многочлены Чебышева

Докажите, что для любого целого $n \geqslant 0$ существует такой многочлен $T_n(x)$, что $\cos nx = T_n(\cos x)$.

О чём поговорить: многочлены Чебышева

Докажите, что $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ (при $n \geqslant 2$).

О чём поговорить: многочлены Чебышева

Докажите, что для любого целого $n \geqslant 0$ существует такой многочлен $T_n(x)$, что $\cos nx = T_n(\cos x)$.

О чём поговорить: многочлены Чебышева

Докажите, что $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ (при $n \geqslant 2$).

О чём поговорить: многочлены Чебышева

Докажите, что все коэффициенты $T_n(x)$ целые.

Целочисленные и целозначные многочлены

Богомолов Юрий Викторович

Ярославский региональный инновационно-образовательный центр «Новая школа»
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

3 марта 2021 г.