

Математика, 10 класс, муниципальный этап

Критерии и методика оценивания

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор одного из случаев методом, позволяющим решить задачу в целом, доказательство леммы, используемой в одном из доказательств, нахождение примера или доказательства оценки в задачах типа «оценка + пример» и т.п.). Наконец, возможны как существенные, так и не влияющие на логику рассуждений логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать все вышеперечисленное.

В соответствии со стандартными правилами проведения математических олимпиад школьников **каждая задача оценивается в целое число баллов от 0 до 7.**

Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Ниже будут приведены критерии к предложенным задачам олимпиады (локальные критерии), содержащие указания к оцениванию (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Такие локальные критерии по отдельным задачам имеют более высокий приоритет по отношению к универсальным критериям.

Важно отметить, что любое правильное (!) решение оценивается в 7 баллов.

Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного или от других решений, известных жюри. При проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается только математическая правильность, корректность, полнота решения; баллы не снижаются за «недостаточную» красоту, оптимальность решения.

Олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются

основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении.

Баллы не выставляются «за старание участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи.

Все решения, если не указано противное, требуют обоснования.

Если решения не совпадают с приведенными, читайте внимательно!

Максимальный балл за все задания олимпиады — 35 баллов.

№задачи	1	2	3	4	5	Всего
Баллы	7	7	7	7	7	35

Решения и указания по проверке

1. Три козлёнка — Алюль, Булюль и Хиштаки Саританур — соревнуются, кто быстрее забежит на гору и сбежит с неё. Алюль бежит в гору и с горы с одной и той же скоростью. Булюль бежит в гору вдвое медленнее Алюля, но зато спускается вдвое быстрее. Хиштаки Саританур бежит в гору втрое медленнее Алюля, но зато спускается втрое быстрее. Кто из них победит в соревновании, кто будет вторым, а кто — третьим?

Ответ. Победит Алюль, второй — Булюль, третий — Хиштаки Саританур.

Решение. Раз Булюль поднимается в гору вдвое медленнее Алюля, то Алюль успеет подняться в гору и спуститься с неё ровно за то время, за которое Булюль только поднимется (а ведь ему ещё спускаться).

Булюль на спуск с горы тратит в 4 раза меньше времени, чем на подъём на неё, поэтому спуск с горы занимает у него меньше времени, чем подъём на $\frac{1}{3}$ пути в гору. Но когда Булюль доберётся до вершины горы, Хиштаки Саританур преодолеет только $\frac{2}{3}$ пути вверх, ему останется $\frac{1}{3}$ этого пути — это потребует у него времени больше, чем Булюлю на тот же путь, но Булюль за это время (как было сказано ранее) уже успеет спуститься с горы, поэтому опередит Хиштаки Саританура.

Таким образом, Алюль опередит всех, а Булюль опередит Хиштаки Саританура, поэтому расположатся они в том же порядке, что в условии задачи.

Критерии. Обоснованно получен верный ответ — 7 баллов.

Получен верный ответ без верного обоснования — 1 балл.

Доказано, что Алюль быстрее Булюля и/или Хиштаки Саританура — 3 балла.

Доказано, что Булюль опередит Хиштаки Саританура — 3 балла.

Баллы за две упомянутые части доказательства и за ответ суммируются.

Если обоснование получено для частного случая скоростей или расстояний (например, в виде «пусть скорость Алюля равна 6 км/ч, тогда...») — не более 1 балла за каждый из пунктов.

2. Известно, что для нечётных a и b число $a^3 - b^3$ делится на 8. Докажите, что число $a^2 - b^2$ (а) делится на 8; (б) делится на 16.

Решение. Число $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ делится на 8, а число $a^2 + ab + b^2$ нечётно (a и b нечётны, поэтому a^2 , ab и b^2 тоже нечётны, а сумма трёх нечётных чисел нечётна). Поэтому первый множитель $a - b$ делится на 8 (здесь пользуемся тем, что если произведение двух целых чисел mn делится на какое-то целое d , а один из множителей не имеет с d общих простых делителей, то другой множитель делится на d). Но тогда и число $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ содержит множитель, делящийся на 8, поэтому само делится на 8. Это доказывает пункт **(а)**. Для пункта **(б)** осталось заметить, что так как числа a и b нечётны, то сумма $a + b$ чётна. Тогда $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ — это произведение двух множителей, один из которых делится на 8, а другой делится на 2, поэтому произведение делится на $8 \cdot 2 = 16$.

Критерии. Доказано, что $a^2 - b^2$ делится на 8 — 4 балла.

Доказано, что $a^2 - b^2$ делится на 16 — 7 баллов.

Доказано только, что $a - b$ делится на 8 — 3 балла.

Доказано только, что $a^2 - b^2$ делится на 4 (это верно для любых нечётных a и b , не только тех, для которых $a^3 - b^3$ делится на 8) — 1 балл.

3. Уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет только корни x_1 и x_2 , а уравнение $x^2 + (p^2 - \frac{1}{2})x + (q^2 - \frac{1}{2}) = 0$ — только корни $x_1^2 - \frac{1}{2}$ и $x_2^2 - \frac{1}{2}$. Найдите все возможные значения (p, q) .

Ответ. $p = 0$, $q = -\frac{3}{4}$.

Решение. Запишем теорему Виета для этих двух уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 x_2 = q, \\ \left(x_1^2 - \frac{1}{2}\right) + \left(x_2^2 - \frac{1}{2}\right) = -\left(p^2 - \frac{1}{2}\right), \\ \left(x_1^2 - \frac{1}{2}\right)\left(x_2^2 - \frac{1}{2}\right) = q^2 - \frac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 x_2 = q, \\ x_1^2 + x_2^2 = \frac{3}{2} - p^2, \\ x_1^2 x_2^2 - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) = q^2 - \frac{3}{4}. \end{cases}$$

В последнем уравнении поставим $x_1 x_2 = q$ и $x_1^2 + x_2^2 = \frac{3}{2} - p^2$ из второго и третьего уравнения системы, получим

$$q^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - p^2\right) = q^2 - \frac{3}{4} \Leftrightarrow p^2 = 0 \Leftrightarrow p = 0.$$

При $p = 0$ имеем $x_1 + x_2 = 0$, откуда $x_2 = -x_1$. Но тогда третье уравнение системы запишется как $x_1^2 + (-x_1)^2 = \frac{3}{2}$, поэтому $2x_1^2 = \frac{3}{2}$ и $x_1^2 = \frac{3}{4}$. Следовательно, $q = x_1 x_2 = -x_1^2 = -\frac{3}{4}$. Таким образом, $p = 0$ и $q = -\frac{3}{4}$. Несложно убедиться, что эти значения подходят: уравнение $x^2 - \frac{3}{4} = 0$ имеет два различных корня $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, а уравнение $x^2 + (0^2 - \frac{1}{2})x + (\frac{9}{16} - \frac{1}{2}) = 0$, равносильное $16x^2 - 8x + 1 = 0$, — корень $\frac{1}{4} = \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$ кратности 2.

Критерии. Обоснованно получен верный ответ — 7 баллов.

Один только верный ответ без обоснования — 0 баллов.

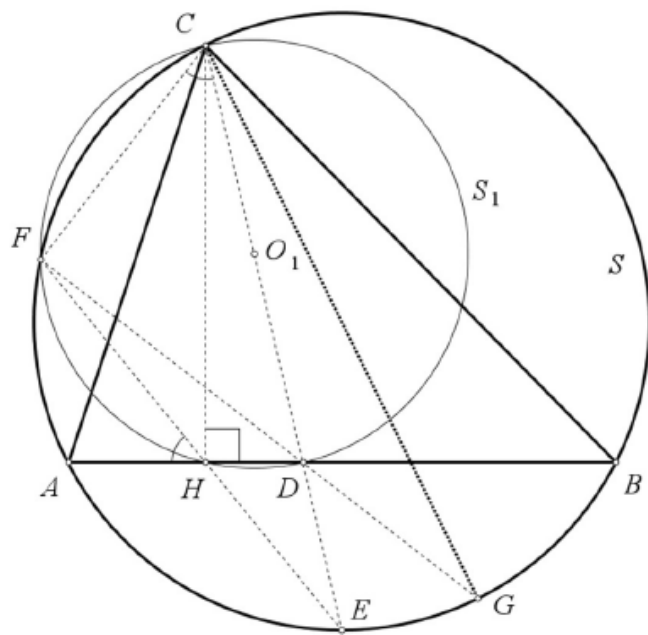
Верный ответ с проверкой, что приведённые значения удовлетворяют условию задачи, — 1 балл.

Верно составлена система из теоремы Виета для двух уравнений — 1 балл (суммируется с верным ответом).

Из системы верно найден один из двух параметров (p или q) — ещё 2 балла.
За отсутствие проверки того, что при найденных значениях p и q уравнения имеют нужные корни, оценка не снижается.

4. В неравнобедренном остроугольном треугольнике ABC провели биссектрису CD и высоту CH . Пусть S — описанная окружность треугольника ABC . Луч CD пересекает S в точке E , луч EH пересекает S в точке F , а луч FD пересекает S в точке G . Докажите, что CG — диаметр S .

Решение. Так как CD — биссектриса, то вписанные углы $\angle ACE$ и $\angle BCE$ равны, а тогда равны и соответствующие дуги $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{EB}$. Угол между пересекающимися хордами равен полусумме стягиваемых ими дуг, поэтому $\angle AHF = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{FA} + \overset{\frown}{EB}) = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{FA} + \overset{\frown}{AE}) = \frac{1}{2}\overset{\frown}{FE} = \angle FCE = \angle FCD$. Так как $\angle FCD = \angle AHF$, то у четырёхугольника $CDHF$ внутренний угол равен смежному к противоположному углу, а это означает, что четырёхугольник $CDHF$ вписанный (иначе этот признак можно записать как $\angle DHF = 180^\circ - \angle AHF = 180^\circ - \angle FCD$, т.е. $\angle DHF + \angle FCD = 180^\circ$). Тогда имеет место равенство вписанных углов: $\angle CFD = \angle CHD = 90^\circ$, т.е. $\angle CFG = \angle CFD = 90^\circ$, а вписанный прямой угол опирается на диаметр.



Критерии. Полное обоснованное решение — 7 баллов.

Доказано равенство углов $\angle AHF = \angle ECF$, при этом дальнейшие рассуждения отсутствуют или содержат ошибку, — 3 балла.

Доказано, что четырёхугольник $CDHF$ вписанный, при этом дальнейшие рассуждения отсутствуют или содержат ошибку, — 4 балла.

Рассмотрен только случай, когда $AC = BC$, или другой частный случай треугольника ABC , — 0 баллов.

5. Архипелаг состоит из девяти круглых островов, расположенных по кругу. Каждые два соседних острова соединены ровно двумя мостами. На одном острове расположен музей. Найдите количество маршрутов, которые начинаются и заканчиваются на острове с музеем и при этом проходят по каждому мосту ровно по одному разу.

Ответ: $10 \cdot 2^{10} = 10240$.

Решение. Рассмотрим сначала маршруты, в которых первый ход совершается по часовой стрелке. Эти маршруты бывают двух видов: (1) которые делают в этом направлении два полных круга; (2) которые делают несколько ходов в этом направлении до какого-то острова, там разворачиваются, проходят по всему архипелагу, доходя до этого острова с другой стороны, снова разворачиваются и доходят до острова с

музеем. Для удобства пронумеруем острова: 1-й (где музей), 2-й, 3-й, ..., 9-й. Посчитаем количество маршрутов этих двух видов.

Первый вид (двойной круг): здесь на первом круге на каждом из 9 переходов (с 1-го острова на 2-й, со 2-го на 3-й, ..., с 9-го на 1-й) можно выбрать мост двумя способами, поэтому всего способов получается $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^9$. На втором круге мосты уже выбираются однозначно (каждый раз идём по тому мосту, по которому до этого ещё не ходили). Поэтому всего мостов первого вида будет $2^9 = 512$.

Второй вид: пусть сначала идём до k -го острова по часовой стрелке (при этом на каждом переходе можно выбрать любой из двух мостов, поэтому здесь количество способов выбрать мосты будет $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots$ — столько двоек, сколько сделали переходов). Далее разворачиваемся и идём против часовой стрелки до 1-го острова (на этом участке пути мосты выбираются уже однозначно: каждый раз идём по мосту, по которому ещё не ходили). После этого продолжаем движение против часовой стрелки от 1-го острова до k -го (здесь тоже количество способов выбрать мосты будет $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots$ — столько двоек, сколько сделали переходов, так как на каждом переходе выбираем один из двух мостов). Наконец, добравшись до k -го острова, разворачиваемся и снова идём по часовой стрелке до 1-го острова (на этом участке пути снова мосты выбираются однозначно: каждый раз выбираем тот мост, по которому не ходили). Всего количество способов выбрать мосты будет $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots = 2^9$, так как два варианта выбора моста было на каждом переходе от 1-го моста до k -го в одну сторону, а потом от 1-го моста до k -го в другую сторону — всего 9 переходов. Это количество (2^9) будет для каждого из вариантов выбрать мост для разворота: т.е. для $k = 2, k = 3, \dots, k = 9$ и даже $k = 1$ (т.е. если сначала делали круг по часовой стрелке, а потом вернулись против часовой). Таким образом, количество маршрутов второго вида будет $9 \cdot 2^9$ (9 способов выбрать остров для разворота, а для каждого из этих способов есть 2^9 маршрутов).

Таким образом, всего маршрутов (первого и второго вида вместе) будет $2^9 + 9 \cdot 2^9 = 10 \cdot 2^9 = 5120$. Но это мы посчитали только маршруты, где первый шаг делается по часовой стрелке. Маршрутов, где первый шаг делается против часовой стрелки, ровно столько же. Поэтому найденное количество маршрутов надо умножить на 2: получим $2 \cdot 10 \cdot 2^9 = 20 \cdot 2^{10} = 10240$ — это общее число маршрутов.

Критерии. Приведено полное решение — 7 баллов.

Верно подсчитаны маршруты первого вида — 2 балла.

Верно подсчитаны маршруты второго вида — 4 балла.

Ещё 1 балл ставится, если подсчитаны маршруты и первого, и второго видов.

Если рассматривались только маршруты, в которых первый ход делается в какую-то конкретную сторону (например, по часовой стрелке), из-за чего результат (или частичный результат) оказался вдвое меньше правильного, — баллы за эти подсчёты уменьшаются вдвое (например, если подсчитаны маршруты двух видов, но стартующие только в одном направлении, то ставить $\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 4 + 1 = 4$ балла).

Верный ответ без обоснования — 1 балл.

Если ответ оставлен в виде суммы и/или с непосчитанными степенями (например, $10 \cdot 2^{10}$ вместо 10240) — баллы не снижаются.