

Математика, 8 класс, муниципальный этап

Критерии и методика оценивания

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор одного из случаев методом, позволяющим решить задачу в целом, доказательство леммы, используемой в одном из доказательств, нахождение примера или доказательства оценки в задачах типа «оценка + пример» и т.п.). Наконец, возможны как существенные, так и не влияющие на логику рассуждений логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать все вышеперечисленное.

В соответствии со стандартными правилами проведения математических олимпиад школьников **каждая задача оценивается в целое число баллов от 0 до 7.**

Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Ниже будут приведены критерии к предложенным задачам олимпиады (локальные критерии), содержащие указания к оцениванию (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Такие локальные критерии по отдельным задачам имеют более высокий приоритет по отношению к универсальным критериям.

Важно отметить, что любое правильное (!) решение оценивается в 7 баллов.

Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного или от других решений, известных жюри. При проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается только математическая правильность, корректность, полнота решения; баллы не снижаются за «недостаточную» красоту, оптимальность решения.

Олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются

основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении.

Баллы не выставляются «за старание участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи.

Все решения, если не указано противное, требуют обоснования.

Если решения не совпадают с приведенными, читайте внимательно!

Максимальный балл за все задания олимпиады — 35 баллов.

№задачи	1	2	3	4	5	Всего
Баллы	7	7	7	7	7	35

Решения и указания по проверке

1. На спортивном фестивале 100 восьмиклассников делали зарядку, во время которой каждый мальчик два раза крикнул «Лодочка!» и три раза крикнул «Фонтанчик!», а каждая девочка три раза крикнула «Лодочка!» и пять раз крикнула «Фонтанчик!» Ведущий подсчитал, что всего 222 раза крикнули «Лодочка!». А сколько раз крикнули «Фонтанчик!»?

Ответ. 344 раза.

Решение.

Первый способ. Пусть было x мальчиков и $100 - x$ девочек. По условию $2x + 3(100 - x) = 222$, откуда $x = 300 - 222 = 78$. Таким образом, мальчиков было 78, девочек было 22, а крикнули «Фонтанчик!» всего $78 \cdot 3 + 22 \cdot 5 = 344$ раза.

Второй способ. Если бы были только мальчики, то «Лодочка!» крикнули бы 200 раз, а «Фонтанчик!» — 300 раз. Каждая замена мальчика на девочку увеличивает количество выкриков «Лодочка!» на 1 (а выкриков «Фонтанчик!» — на 2): раз выкриков «Лодочка!» было 222 (на 22 больше), то и таких замен было 22, поэтому выкриков «Фонтанчик!» стало на 44 больше, то есть 344.

Критерии. Обоснованно получен верный ответ — 7 баллов. Получен верный ответ без верного обоснования — 0 баллов.

2. Из посёлка Андреево в село Берендеево одновременно выехали автомобиль и мотоцикл и ехали с постоянными скоростями. Через 50 минут после старта мотоцикл доехал до Берендеева, сразу развернулся и поехал обратно с прежней скоростью, а через 10 минут после разворота встретил едущий ему навстречу автомобиль. Во сколько раз скорость мотоцикла больше скорости автомобиля?

Ответ. $3 : 2 = 1,5$.

Решение. Отметим на прямой точки A и B (это Андреево и Берендеево соответственно), а точкой C обозначим место их встречи. Поскольку мотоцикл проехал отрезок AB за 50 минут, а отрезок BC — за 10 минут, то отрезок AC он проехал за 40 минут. Так как автомобиль проехал тот же отрезок AC за 60 минут, то отношение скоростей мотоцикла и автомобиля равно $60 : 40 = 3 : 2 = 1,5$.

Критерии. Верный ответ без обоснования — 2 балла. «Обоснование», полученное рассмотрением частного случая (расстояний, скоростей), баллов не добавляет. Полное решение с обоснованием — 7 баллов.

3. На доску записали натуральные числа a , b и c , среди которых нет одинаковых. В тетрадь записали числа $2024 + a - b$, $2024 + b - c$ и $2024 + c - a$ (именно в этом порядке). Докажите, что в тетради не могли оказаться три последовательных натуральных числа. (Натуральные числа называются последовательными, если каждое следующее на 1 больше предыдущего: например, числа 9, 10, 11.)

Решение. Пусть в тетради всё же оказались три последовательных натуральных числа. Обозначим их как $x - 1$, x и $x + 1$. Тогда их сумма равна $(x - 1) + x + (x + 1) = 3x$, но по условию она равна $(2024 + a - b) + (2024 + b - c) + (2024 + c - a) = 3 \cdot 2024 + (a - b + b - c + c - a) = 3 \cdot 2024$. Отсюда $3x = 3 \cdot 2024$, поэтому $x = 2024$. Но тогда это и есть среднее из трёх чисел в тетради, то есть $2024 = 2024 + b - c$, откуда $b - c = 0$ или $b = c$. Получили противоречие, так как по условию числа b и c не могут быть равными.

Критерии. Приведено верное доказательство — 7 баллов. «Обоснование», полученное рассмотрением одного или нескольких частных случаев, не принимается и в баллах не оценивается.

4. Дан треугольник ABC . На его сторонах AB , BC и CA соответственно отметили точки F , D и E . Оказалось, что $\angle FEA = \angle DFB$, $\angle FDB = \angle DEC$, а треугольник DEF — равносторонний. Докажите, что тогда треугольник ABC — тоже равносторонний.

Решение. Пусть $x = \angle FEA = \angle DFB$, $y = \angle FDB = \angle DEC$. Также знаем, что $\angle DEF = \angle EFD = \angle EDF = 60^\circ$. Рассмотрим развёрнутый $\angle AEC = 180^\circ = x + 60^\circ + y$, откуда $x + y = 120^\circ$. Тогда в треугольнике BDF имеем $\angle DBF = 180^\circ - (x + y) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. Также имеем $\angle EFA = 180^\circ - x - 60^\circ = 120^\circ - x = y$. Но тогда в треугольнике FAE находим угол: $\angle FAE = 180^\circ - x - y = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. Таким образом, в треугольнике ABC нашли два угла по 60° , поэтому и третий угол равен 60° , а раз три угла по 60° , то треугольник равносторонний.

Критерии. Доказано, что $x + y = 120^\circ$ — 2 балла. Найден один из углов треугольника ABC — ещё 2 балла. Найдены (обоснованно) все углы треугольника ABC , но не сделан вывод о виде треугольника, — 5 баллов. Полное решение — 7 баллов. Рассуждение, основанное на неуказанных в условии задачи допущениях — например, о величине углов x или y или о расположении точек D , E , F (к примеру, используется, что стороны треугольника DEF параллельны сторонам ABC), — доказательством не является (частный случай) и оценивается в 0 баллов.

5. Трёхзначное натуральное число, не содержащее цифры 0, назовём интересным, если оно само не делится на 4, а также при любой перестановке его цифр получается число, также не делящееся на 4. Найдите количество интересных чисел.

Ответ: 283.

Решение. Воспользуемся признаком делимости на 4: число \overline{abc} делится на 4 тогда и только тогда, когда \overline{bc} делится на 4. Далее рассмотрим, сколько нечётных цифр

может быть в интересном числе.

(1) Если все три цифры нечётны, то при любой их перестановке получим нечётное число, а тогда оно интересное. На каждом из трёх мест может стоять любая из пяти нечётных цифр (1, 3, 5, 7 или 9), поэтому количество таких трёхзначных чисел равно $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

(2) Если две нечётные цифры и одна чётная. При перестановках цифр на последнем месте может оказаться либо нечётная цифра (и тогда полученное число не делится на 4), либо чётная цифра — а тогда число не делится на 4 только в том случае, если эта цифра 4 или 8. Действительно, если последняя цифра 2, а предпоследняя — нечётная цифра $b = 2k + 1$, то число делится на 4 только в том случае, если $\overline{b2}$ делится на 4, вот как раз в нашем случае имеем $\overline{b2} = 10b + 2 = 10(2k + 1) + 2 = 20k + 12$ — делится на 4. Аналогично для последней цифры 6. Если же последняя цифра 4, то число, образованное двумя последними цифрами, равно $\overline{b4} = 10b + 4 = 10(2k + 1) + 4 = 20k + 14 = 4 \cdot (5k + 3) + 2$ — не делится на 4. Аналогично для последней цифры 8. Таким образом, чётной может быть цифра 4 или 8, и каждое такое число, содержащее одну из цифр 4 или 8 и две нечётные цифры, является интересным. Если первые две цифры нечётные, а последняя 4 или 8, то таких чисел будет $5 \cdot 5 \cdot 2 = 50$. Поскольку чётная цифра также может быть и на втором, и на третьем месте, то всего таких чисел $3 \cdot 50 = 150$.

(3) Пусть в числе одна нечётная цифра и две чётные. Из предыдущих рассуждений имеем, что чётная цифра не может быть 2 или 6. Но тогда чётные цифры должны быть 4 или 8, и эти две цифры, поставленные в конце числа, дают число, кратное 4. Поэтому интересных чисел такого вида не существует.

(4) Если все три цифры чётные, то среди них не может быть цифр 4 или 8, потому что числа $\overline{b4}$ и $\overline{b8}$ при чётной цифре b делятся на 4. Поэтому цифры могут быть 2 или 6 (два варианта), и каждое такое число является интересным. Так как в каждый из трёх разрядов можно поставить цифру 2 или 6, то таких чисел $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Суммируем найденные количества интересных чисел каждого вида: $125 + 150 + 0 + 8 = 283$ — это и есть общее количество интересных чисел.

Критерии. Обоснованно получен верный ответ — 7 баллов.

Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

Если при рассмотрении трёх случаев из авторского решения в двух из трёх случаев количество чисел подсчитано верно, а в одном допущена вычислительная ошибка (при этом верно указана последовательность действий) — 5 баллов.

Если при рассмотрении трёх случаев из авторского решения в одном из трёх случаев количество чисел подсчитано верно, а в двух допущена вычислительная ошибка (при этом верно указана последовательность действий) — 3 балла.

При неверном способе подсчёта в одном из случаев и верно найденных количествах в двух других — 2 балла.

При неверном способе подсчёта в двух случаях и верно найденном количестве в оставшемся — 1 балл.

Если использованы без обоснования утверждения, что все числа, содержащие одну из цифр 4 или 8 и две нечётные цифры, и все трёхзначные числа, состоящие только из цифр 2 или 6, являются интересными, то баллы за это не снижаются.