

## Математика, 9 класс, муниципальный этап

### Критерии и методика оценивания

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор одного из случаев методом, позволяющим решить задачу в целом, доказательство леммы, используемой в одном из доказательств, нахождение примера или доказательства оценки в задачах типа «оценка + пример» и т.п.). Наконец, возможны как существенные, так и не влияющие на логику рассуждений логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать все вышеперечисленное.

В соответствии со стандартными правилами проведения математических олимпиад школьников **каждая задача оценивается в целое число баллов от 0 до 7.**

Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Ниже будут приведены критерии к предложенным задачам олимпиады (локальные критерии), содержащие указания к оцениванию (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Такие локальные критерии по отдельным задачам имеют более высокий приоритет по отношению к универсальным критериям.

**Важно отметить, что любое правильное (!) решение оценивается в 7 баллов.**

Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного или от других решений, известных жюри. При проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается только математическая правильность, корректность, полнота решения; баллы не снижаются за «недостаточную» красоту, оптимальность решения.

Олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются

основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении.

Баллы не выставляются «за старание участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи.

**Все решения, если не указано противное, требуют обоснования.**

**Если решения не совпадают с приведенными, читайте внимательно!**

**Максимальный балл за все задания олимпиады — 35 баллов.**

№задачи	1	2	3	4	5	Всего
Баллы	7	7	7	7	7	35

### Решения и указания по проверке

1. Каждое утро Петя и Вася выгуливают собак вдоль длинной прямой дороги, соединяющей их дома, двигаясь навстречу друг другу с одинаковыми неизменными скоростями. В понедельник Петя вышел из дома в 5:00, а Вася — в 5:05, в результате они встретились на расстоянии 800 м от дома Пети. Во вторник Петя вышел в 5:05, а Вася — в 5:00, в результате встреча состоялась на расстоянии 400 м от дома Пети. На каком расстоянии от дома Пети они встретятся, если оба выйдут в 5:00?

Ответ: 600 м.

Решение.

*Первый способ.* Поскольку ситуация, описанная во втором случае, симметрична ситуации в первом случае, то Петя и Вася во втором случае встретятся на расстоянии 800 м от дома Васи, но так как место встречи находится на расстоянии 400 м от дома Пети, то расстояние между их домами равно  $400 + 800 = 1200$  м. Если Петя и Вася выйдут одновременно, то за равное время они пройдут равные расстояния, следовательно, встретятся на середине пути, т.е. на расстоянии 600 м от дома Пети.

*Второй способ.* Пусть  $v$  м/мин — скорость движения Пети и Васи,  $x$  м — расстояние между домами. В первом случае Петя до места встречи идет  $\frac{800}{v}$  мин, а

Вася  $\frac{x - 800}{v}$  мин. Разница в затраченном ими времени равна 5 мин, т.е.  $\frac{800}{v} - \frac{x - 800}{v} = 5$ , отсюда  $1600 - x = 5v$ . Во втором случае Петя до места встречи идет

$\frac{400}{v}$  мин, а Вася  $\frac{x - 400}{v}$  мин. Разница в затраченном ими времени равна 5 мин,

т.е.  $\frac{x - 400}{v} - \frac{400}{v} = 5$ , отсюда  $x - 800 = 5v$ . Приравнивая левые части полученных равенств, получим  $1600 - x = x - 800$ , откуда  $2x = 2400$  и  $x = 1200$ . Если Петя и Вася выйдут одновременно, то встретятся на середине пути, т.е. на расстоянии 600 м от дома Пети.

*Критерии.* Обоснованно получен верный ответ — 7 баллов.

Только верный ответ без обоснования или с обоснованием, полученном на основе недоказанного предположения о расстоянии между домами, — 2 балла.

Верно составлено уравнение или система уравнений для нахождения расстояния между домами, при этом дальнейшее продвижение отсутствует либо решение неверное — 2 балла (суммируется с верным ответом, если он присутствует).

С помощью верных рассуждений верно найдено расстояние между домами, при этом искомое расстояние не найдено или найдено неверно — 5 баллов.

2. Клетчатая таблица  $3 \times 3$  называется магическим квадратом, если сумма трёх чисел в каждой строке, каждом столбце и каждой из двух диагоналей (из угла в угол) одна и та же. Составили магический квадрат, но некоторые числа стёрли — осталось только то, что на чертеже справа. Определите, какое число могло стоять в клетке, отмеченной буквой  $A$ . Найдите все возможные варианты и обоснуйте, почему нет других.

		7
A		
	10	3

*Ответ:* 4.

*Решение.* Обозначим числа, стоящие ещё в некоторых клетках квадрата (см. чертеж) через  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Тогда сумма чисел в нижней строке равна  $a + 10 + 3$ , а сумма чисел в диагонали из левого нижнего угла в правый верхний равна  $a + b + 7$ . По определению магического квадрата  $a + 10 + 3 = a + b + 7$ , откуда  $b = 6$ . Сумма чисел в правом столбце равна  $7 + c + 3$ , поэтому  $a + 10 + 3 = 7 + c + 3$ , откуда  $c = a + 3$ . Наконец, сумма чисел во второй строке равна  $A + 6 + c$ , что равно сумме чисел в нижней строке, то есть  $A + 6 + c = a + 10 + 3$ , но так как  $c = a + 3$ , то запишем это так:  $A + 6 + (a + 3) = a + 10 + 3$ , откуда  $A = 4$  — это единственный возможный ответ. Пример такого квадрата строится (в верхней строке: 9, 2, 7; в средней строке: 4, 6, 8; в нижней строке: 5, 10, 3).

		7
A	b	c
a	10	3

*Критерии.* Обоснованно получено, что возможен только случай  $A = 4$ , — 7 баллов.

Если доказано, что при соблюдении условий возможно лишь  $A = 4$ , но не приведён пример подходящего квадрата, — баллы не снижаются.

Получен верный ответ без обоснования и без примера магического квадрата — 1 балл.

Получен верный ответ и пример подходящего магического квадрата, но нет обоснования, почему вместо  $A$  не может стоять другого числа, — 3 балла.

3. Аня, Боря и Витя задумали по одному целому числу. Если из числа Бори вычесть число Вити, то получится число Ани. А если число Ани разделить на число Вити, то получится число Бори. Чему могли быть равны задуманные числа? (Найдите все возможные варианты ответа и обоснуйте, почему нет других.)

*Ответ.*  $-4$ ,  $-2$  и  $2$ .

*Решение.* Обозначим числа, задуманные Аней, Борей и Витей, как  $a$ ,  $b$  и  $c$  соответственно. По условию  $a = b - c$  и  $b = \frac{a}{c}$  (отсюда сразу следует, что  $c \neq 0$ ). Тогда  $a = bc$  и, подставив в первое равенство, получим  $bc = b - c$ . Дальше можно действовать по-разному.

*Первый способ.* Перепишем равенство в виде  $bc - b + c = 0$ , откуда  $b(c - 1) + c = 0 \Rightarrow b(c - 1) + (c - 1) = -1 \Rightarrow (b + 1)(c - 1) = -1$ . Числа в скобках целые, а получить в произведении  $-1$  можно только перемножением  $1$  и  $-1$  в каком-то порядке. Отсюда два варианта: (1)  $b + 1 = 1$  и  $c - 1 = -1$ , но тогда  $c = 0$ , что не подходит; (2)  $b + 1 = -1$  и  $c - 1 = 1$ , откуда  $b = -2$  и  $c = 2$ , а тогда  $a = bc = -4$ .

*Второй способ.* Перепишем равенство в виде  $bc + c = b$ , откуда  $c(b + 1) = b$  и  $c = \frac{b}{b + 1}$ . Тогда  $c = \frac{(b + 1) - 1}{b + 1} = 1 - \frac{1}{b + 1}$ . Так как  $c$  — целое число, то  $1$  делится на  $b + 1$ . Следовательно,  $b + 1 = 1$  или  $b + 1 = -1$ . В первом случае  $c = 0$ , что невозможно, во втором  $b = -2$  и  $c = 2$ , откуда  $a = bc = -4$ .

*Третий способ.* Так как  $bc$  делится на  $c$  и  $c$  делится на  $c$ , то  $b = bc + c$  делится на  $c$ . Аналогично показывается, что  $c$  делится на  $b$ . Тогда  $b$  и  $c$  делятся друг на друга, поэтому они или равны, или противоположны. Если  $b = c$ , то  $a = b - c = 0$  и  $b = \frac{a}{c} = \frac{0}{c} = 0$ . Но тогда  $c = 0$  (оно равно  $b$ ), что невозможно. Следовательно,  $b = -c$ . Подставим в равенство  $bc = b - c$ :  $-c^2 = -c - c$ , откуда  $c^2 - 2c = 0$ . Это уравнение имеет корни  $0$  (но  $c \neq 0$ ) и  $2$ . Тогда  $c = 2$ ,  $b = -c = -2$ ,  $a = bc = -4$ .

*Критерии.* Обоснованно получен верный ответ — 7 баллов.

Только верный ответ без обоснования — 1 балл.

Получена верная формула, выражающая одну из переменных через одну другую (например,  $b$  через  $c$ ), после чего угадано верное значение переменной (или приведено без верного обоснования), при этом не доказано, почему целочисленные значения получаются только при таких значениях переменной — 4 балла.

4. При каких натуральных значениях  $n$  можно подобрать такие числа  $n$  чисел, ни одно из которых не равно 0, чтобы их сумма была положительной, а сумма их кубов — отрицательной? Найдите все возможные ответы и обоснуйте, почему нет других.

*Ответ.* Все значения  $n \geq 3$ .

*Решение.* При  $n = 1$  таких чисел (такое число) не подобрать: оно должно быть положительным, но тогда и куб будет положительным, а по условию нужно отрицательное значение.

При  $n = 2$  таких чисел также не существует: действительно, если  $a_1 + a_2 > 0$ , то  $a_1 > -a_2$ , но тогда и для кубов будет верно, что  $a_1^3 > (-a_2)^3$ , откуда  $a_1^3 > -a_2^3$  и  $a_1^3 + a_2^3 > 0$ , а нужно отрицательное значение.

При  $n = 3$  существует пример: можно взять числа  $a_1 = -1$  и  $a_2 = a_3 = \frac{2}{3}$ . Тогда  $a_1 + a_2 + a_3 = -1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3} > 0$ , однако  $a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 = -1 + \frac{8}{27} + \frac{8}{27} = \frac{11}{27} < 0$ .

При любом  $n > 3$  также есть верный пример: можно взять числа  $a_1 = -1$  и  $a_2 = \dots = a_n = \frac{1}{n-2}$ . Тогда  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = -1 + (n - 1) \cdot \frac{1}{n-2} = \frac{1}{n-2} > 0$ , однако  $a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 = -1 + (n - 1) \cdot \frac{1}{(n-2)^3} = -1 + \frac{(n-2)+1}{(n-2)^3} = -1 + \frac{1}{(n-2)^2} + \frac{1}{(n-2)^3} \leq -1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} < 0$ .

*Критерии.* Обоснованно получен верный ответ — 7 баллов.

Верно показано, что для  $n = 2$  таких чисел не существует — 2 балла.

Приведён верный пример для  $n = 3$  — 2 балла.

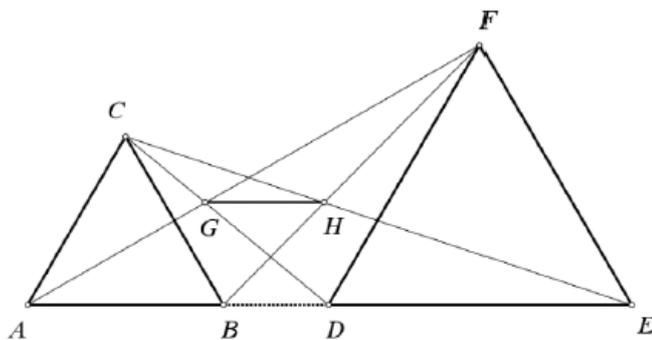
Приведён верный обоснованный пример для всех  $n > 3$  — 3 балла.

Если выполнены 2 из трёх пунктов выше, то баллы за пункты суммируются. За пример с нулевыми числами баллы не начисляются. Ответ без примера не считается.

5. На прямой  $\ell$  отмечены точки  $A, B, D, E$  (в этом порядке). В одной полуплоскости относительно  $\ell$  отметили точки  $C$  и  $F$  так, что треугольники  $ABC$  и  $DEF$  равносторонние. Пусть отрезки  $AF$  и  $CD$  пересекаются в точке  $G$ , а отрезки  $CE$  и  $BF$  — в точке  $H$ . Докажите, что  $AE \parallel GH$ .

Решение. Пусть  $AB = BC = AC = a$ ,  $DE = EF = DF = b$ . Так как  $\angle CAE = \angle FDE = 60^\circ$  и  $\angle CBA = \angle FEA = 60^\circ$ , то  $AC \parallel DF$  и  $BC \parallel EF$ . Тогда  $\angle CAG = \angle DFG$  как накрест лежащие при параллельных  $AC$  и  $DF$  и секущей  $AF$ , аналогично  $\angle ACG = \angle FDG$ . Следовательно, треугольники  $ACG$  и  $FDG$  подобны (по двум углам), поэтому

$\frac{AG}{GF} = \frac{AC}{DF} = \frac{a}{b}$ . Аналогично доказывается подобие треугольников  $BCH$  и  $FEH$ , откуда  $\frac{BH}{HF} = \frac{BC}{EF} = \frac{a}{b}$ . Таким образом,  $\frac{AG}{GF} = \frac{BH}{HF}$ , откуда по обратной теореме о пропорциональных отрезках следует параллельность  $AE$  и  $GH$ .



Критерии. Приведено полное решение — 7 баллов.

Доказано, что одно из отношений  $\frac{AG}{GF}, \frac{CG}{GD}, \frac{CH}{HE}, \frac{BH}{HF}$  равно  $\frac{AB}{DE}$  (отношению сторон равносторонних треугольников) без дальнейших продвижений — 2 балла.

Доказано, что  $\frac{AG}{GF} = \frac{BH}{HF}$  или  $\frac{CG}{GD} = \frac{CH}{HE}$  без дальнейших продвижений — 5 баллов.

Возможно счётное решение в координатах — необходимо следить за корректностью выкладок и обоснованностью вычисления координат точек.