

## Математика, 11 класс, муниципальный этап

### Критерии и методика оценивания

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор одного из случаев методом, позволяющим решить задачу в целом, доказательство леммы, используемой в одном из доказательств, нахождение примера или доказательства оценки в задачах типа «оценка + пример» и т.п.). Наконец, возможны как существенные, так и не влияющие на логику рассуждений логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать все вышеперечисленное.

В соответствии со стандартными правилами проведения математических олимпиад школьников **каждая задача оценивается в целое число баллов от 0 до 7.**

Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Ниже будут приведены критерии к предложенным задачам олимпиады (локальные критерии), содержащие указания к оцениванию (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Такие локальные критерии по отдельным задачам имеют более высокий приоритет по отношению к универсальным критериям.

**Важно отметить, что любое правильное (!) решение оценивается в 7 баллов.**

Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного или от других решений, известных жюри. При проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается только математическая правильность, корректность, полнота решения; баллы не снижаются за «недостаточную» красоту, оптимальность решения.

Олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются

основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении.

Баллы не выставляются «за старание участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи.

***Все решения, если не указано противное, требуют обоснования.***

***Если решения не совпадают с приведенными, читайте внимательно!***

**Максимальный балл за все задания олимпиады — 35 баллов.**

№задачи	1	2	3	4	5	Всего
Баллы	7	7	7	7	7	35

### Решения и указания по проверке

1. Два спортсмена бегут по шоссе с постоянной скоростью 12 км/ч на расстоянии 200 м друг от друга. Затем они стали подниматься в двухкилометровую горку, и их скорость упала до 10 км/ч. После этого они побежали с десятикилометровой горки со скоростью 24 км/ч. Какое расстояние было между спортсменами, когда первый из них закончил спуск с горки?

*Ответ:* 400 метров.

*Решение.*

*Первый способ.* Поскольку скорости бегунов на всех участках трассы были равны, время, за которое второй бегун догнал бы первого (если бы тот остановился), остаётся неизменным. На старте оно составляет  $200(\text{м})/200(\text{м/мин}) = 1$  мин. Значит, второй бегун отстает от первого на 1 минуту на последнем участке, т.е. между бегунами  $1 \cdot 400 = 400$  метров.

*Второй способ.* Когда первый бегун добегит до начала подъема, второму бегуну останется бежать до этой точки ещё 200 м, т.е. 1 минуту. За это время отрыв сократится до  $1/6$  км (столько второй бегун пробежит за минуту). Аналогично, когда первый бегун добегит до вершины горки, второму останется бежать до вершины  $1/6$  км, т.е. ту же одну минуту. За эту минуту первый бегун оторвется на  $24/60 \cdot 1000 = 400$  метров. Это расстояние сохранится до финиша, т.к. далее бегуны преодолевают дистанцию с одной скоростью.

*Критерии.* Обоснованно получен верный ответ — 7 баллов. Получен верный ответ без верного обоснования — 2 балла.

2. Маша играет в игру с роботом Валли. У Валли есть три карточки с числами 1, 2, 3. Маша перед началом игры выбирает себе какие-то три карточки из набора 1, 2, 3, 4, 5. Каждый из соперников случайно (не глядя) достаёт любую свою карточку и выкладывает на стол. Маша выигрывает только в том случае, если у неё число на карточке больше, но сумма чисел на выложенных карточках не больше 6. Какие карточки ей нужно взять для игры, чтобы вероятность победы была больше  $\frac{1}{2}$ ? Приведите любой пример и докажите, что он подходит.

*Ответ:* (2, 3, 4) или (3, 4, 5) — любой из этих наборов.

*Решение.* Всего Маша может выложить любую из трёх карточек и Валли — любую из трёх, поэтому возможны 9 комбинаций. Маше нужно подобрать карточки так, чтобы выигрышных из них было не менее пяти. Это можно сделать двумя способами.

*Первый способ:* оставить карточки (2, 3, 4). Тогда выигрышные комбинации:  $[2 - 1]$ ,  $[3 - 1]$ ,  $[3 - 2]$ ,  $[4 - 1]$ ,  $[4 - 2]$ , невыигрышные комбинации:  $[2 - 2]$ ,  $[2 - 3]$ ,  $[3 - 3]$ ,  $[4 - 3]$ . Выигрышных комбинаций пять, поэтому вероятность победы  $\frac{5}{9} > \frac{1}{2}$ .

*Второй способ:* оставить карточки (3, 4, 5). Тогда выигрышные комбинации:  $[3 - 1]$ ,  $[3 - 2]$ ,  $[4 - 1]$ ,  $[4 - 2]$ ,  $[5 - 1]$ , невыигрышные комбинации:  $[3 - 3]$ ,  $[4 - 3]$ ,  $[5 - 2]$ ,  $[5 - 3]$ . Выигрышных комбинаций пять, поэтому вероятность победы  $\frac{5}{9} > \frac{1}{2}$ .

*Комментарий.* Можно доказать, что никакие другие наборы для Маши не подходят. Для начала можно заметить, что нельзя брать карточку с числом 1. Действительно, если у Маши набор  $(1, a, b)$ , невыигрышных наборов уже больше половины:  $[1 - 1]$ ,  $[1 - 2]$ ,  $[1 - 3]$ ,  $[a - 3]$ ,  $[b - 3]$  (последние два точно невыигрышные:  $[2 - 3]$  и  $[3 - 3]$  — число не больше, чем в Валли, а  $[4 - 3]$  и  $[5 - 3]$  — сумма больше 6). Так что надо теперь выбрать какие-то три карточки из 2, 3, 4, 5. В решении доказано, что можно оставить 2 или 5. Если же не взять 3, то невыигрышных комбинаций пять:  $[2 - 2]$ ,  $[2 - 3]$ ,  $[4 - 3]$ ,  $[5 - 2]$ ,  $[5 - 3]$ . Если не взять 4, то невыигрышных комбинаций пять:  $[2 - 2]$ ,  $[2 - 3]$ ,  $[3 - 3]$ ,  $[5 - 2]$ ,  $[5 - 3]$ . Так что возможны только те два варианта, о которых сказано в решении.

*Критерии.* Приведен пример (один из двух возможных) с обоснованием, почему он подходит, — 7 баллов.

Приведен пример (один из двух возможных) без обоснования, почему он подходит, — 2 балла.

Приведено более одного примера, но хотя бы один из них неверный, — пример не засчитывается, ставится 0 баллов.

### 3. Какое из чисел больше:

$$A = \frac{1}{99} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} \right) \quad \text{или} \quad B = \frac{1}{100} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100} \right)?$$

*Ответ.* А больше.

*Решение.*

*Первый способ.* Пусть  $x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99}$ . Нужно сравнить  $A = \frac{1}{99}x$  и

$B = \frac{1}{100} \left( x + \frac{1}{100} \right)$ . Вычтем из  $A$  и  $B$  число  $\frac{1}{100}x$  — теперь нужно сравнить

числа  $\left( \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \right)x$  и  $\frac{1}{100^2}$ . Используем, что  $x > 1$ , получим:  $\left( \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \right)x =$

$= \frac{1}{99 \cdot 100}x > \frac{1}{100 \cdot 100} \cdot 1 = \frac{1}{100^2}$ , т.е. первое число больше второго.

*Второй способ.* В тех же обозначениях, что и в предыдущем способе решения:  $x = 99A$ ,  $B = \frac{1}{100} \left( 99A + \frac{1}{100} \right) < \frac{1}{100} (99A + A) = \frac{1}{100} \cdot 100A = A$ .

*Третий способ.* Вспомогательный факт: если в набор чисел взять ещё число, меньшее каждого из уже имеющихся в наборе, то среднее арифметическое чисел уменьшится. Действительно, пусть  $a = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$  и  $a_{n+1} < a_i$  (для всех  $i$ ). Тогда  $a_{n+1} < m$  (раз меньше каждого числа, то меньше и среднего арифметического), поэтому среднее арифметическое нового набора чисел равно  $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}}{n+1} = \frac{mn + a_{n+1}}{n+1} < \frac{mn + m}{n+1} = \frac{m(n+1)}{n+1} = m$ . Осталось заметить, что число  $A$  — это среднее арифметическое чисел  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{99}$ , а число  $B$  — это среднее арифметическое нового набора чисел, в которое мы взяли ещё число  $\frac{1}{100}$ , которое меньше каждого числа исходного набора, поэтому (по доказанному)  $B < A$ .

*Критерии.* Обоснованно получен верный вывод — 7 баллов.

Получен верный ответ без верного обоснования — 0 баллов.

В том числе неверным считается обоснование, основанное на рассмотрении случая «меньших чисел» (например, сравнили  $\frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$  и  $\frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)$  или ещё один или несколько аналогичных чисел для меньших значений параметров), — оценивается в 0 баллов.

Использован, но не доказан вспомогательный факт из третьего способа решения, — 5 баллов.

4. В тетради записаны все натуральные числа от 1 до 2024 (по одному разу). Какое наименьшее количество этих чисел можно вычеркнуть, чтобы сумма любых шести из оставшихся делилась на 15?

*Ответ.* 1889 чисел.

*Решение.* Условие задачи эквивалентно нахождению наибольшего количества оставшихся чисел. Так как даже если оставить просто все числа, кратные 15, то их будет  $\left\lfloor \frac{2024}{15} \right\rfloor = 134$ , то в максимальном таком наборе должно быть не менее 134 чисел.

Рассмотрим семь из оставшихся чисел:  $a, b, c, d, e, f, g$ . По условию задачи  $a + c + d + e + f + g$  делится на 15 и  $b + c + d + e + f + g$  делится на 15. Тогда  $(a + c + d + e + f + g) - (b + c + d + e + f + g) = a - b$  делится на 15, поэтому числа  $a$  и  $b$  дают при делении на 15 одинаковые остатки. А так как в роли  $a$  и  $b$  можно было выбрать любые два из оставшихся чисел, то можно сделать вывод: все оставшиеся числа имеют одинаковые остатки от деления на 15. Пусть этот остаток равен  $r$ . Тогда сумма шести чисел даёт при делении на 15 такой же остаток, как  $6r$ , поэтому может делиться на 15 только при таких  $r$ , при которых делится и на 5. Так что  $6r$  делится на 5, а так как 6 и 5 взаимно просты, то  $r$  должно делиться на 5, поэтому может быть только  $r = 0$ ,  $r = 5$  или  $r = 10$ .

Если  $r = 0$ , то все оставшиеся числа делятся на 15, поэтому их не более 134 (как говорилось ранее). Если  $r = 5$ , то оставшиеся числа выбираем среди чисел  $5 = 0 \cdot 15 + 5$ ,  $20 = 1 \cdot 15 + 5$ ,  $35 = 2 \cdot 15 + 5$ ,  $\dots$ ,  $2015 = 134 \cdot 15 + 5$ , а таких чисел 135. Наконец, если  $r = 10$ , оставшиеся числа выбираем среди чисел  $10 = 0 \cdot 15 + 10$ ,

$25 = 1 \cdot 15 + 10$ ,  $40 = 2 \cdot 15 + 10$ ,  $\dots$ ,  $2020 = 134 \cdot 15 + 10$ , а таких чисел тоже 135. Следовательно, могли остаться не более 135 чисел, а для этого вычеркнуть нужно не менее  $2024 - 135 = 1889$ . Пример на 1889 вычеркнутых чисел: оставим все числа, дающие остаток 5 от деления на 15, а остальные вычеркнем.

*Критерии.* Обоснованно получено верное решение — 7 баллов.

В ответе указано количество оставшихся чисел, а не количество вычеркнутых — оценка снижается на 1 балл.

Приведён только верный ответ без обоснования — 0 баллов.

Приведён только верный ответ с подходящим набором чисел — 1 балл.

При верном (в целом) решении отсутствует доказательство того, что все выбранные числа должны иметь одинаковые остатки при делении на 15, — 3 балла.

В решении присутствует доказательство того, что все числа дают одинаковые остатки при делении на 15, но рассмотрен только случай, когда все выбранные числа кратны 15, из-за чего получен ответ 134 — 3 балла.

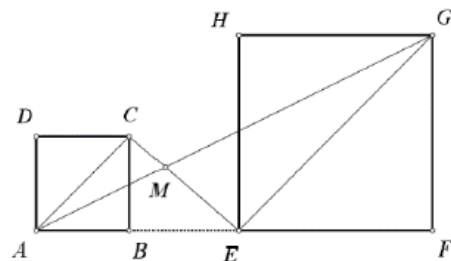
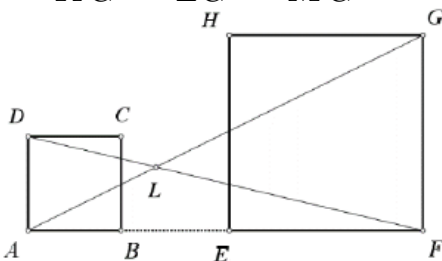
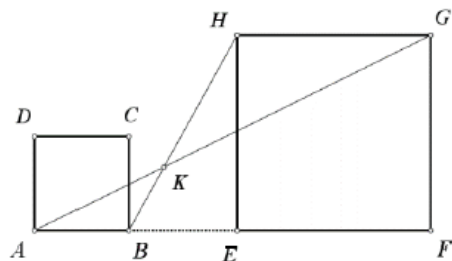
В решении при верном ответе пропущен один из случаев  $r = 0$ ,  $r = 5$  или  $r = 10$  — оценка снижается на 2 балла, пропущены два таких случая — оценка снижается на 3 балла.

Сделана вычислительная ошибка при нахождении количества чисел — оценка снижается на 2 балла.

Если имеют место несколько пунктов, в которых оценка снижается, то вычитаемые баллы суммируются.

5. На прямой  $\ell$  отметили точки  $A, B, E, F$  (именно в этом порядке). Квадраты  $ABCD$  и  $EFGH$  лежат в одной полуплоскости относительно прямой  $\ell$ . Докажите, что прямые  $AG, BH, CE, DF$  пересекаются в одной точке.

*Решение.* Обозначим через  $K, L$  и  $M$  точки пересечения прямой  $AG$  с прямыми  $BH, DF$  и  $CE$  соответственно. Для решения задачи достаточно доказать, что точки  $K, L, M$  делят отрезок  $AG$  в одном и том же отношении (тогда они совпадают). Таким образом, осталось доказать, что  $\frac{AK}{KG} = \frac{AL}{LG} = \frac{AM}{MG}$ .



Пусть стороны квадрата  $ABCD$  равны  $x$ , стороны квадрата  $EFGH$  равны  $y$ . Рассмотрим треугольники  $ABK$  и  $GHK$ . В них  $\angle KAB = \angle KGH$  (как накрест лежащие при  $AB \parallel GH$  и секущей  $AG$ ) и  $\angle BKA = \angle HKG$  (как вертикальные). Следовательно,  $\triangle ABK$  и  $\triangle GHK$  подобны (по двум углам) и  $\frac{AK}{KG} = \frac{AB}{GH} = \frac{x}{y}$ .

Аналогично доказывается подобие  $\triangle ALD$  и  $\triangle GLF$ , откуда  $\frac{AL}{LG} = \frac{AD}{FG} = \frac{x}{y}$ .

Наконец, из параллельности  $AC$  и  $EG$  (так как  $\angle CAB = \angle GEF = 45^\circ$ ) следует равенство углов  $\angle MAC = \angle MGE$  и  $\angle MCA = \angle MEG$  (как накрест лежащих при

$AC \parallel EG$  и секущих  $AG$  и  $CE$  соответственно). Поэтому  $\triangle AMC$  и  $\triangle GMH$  также подобны (по двум углам) и  $\frac{AM}{MG} = \frac{AC}{GE} = \frac{x\sqrt{2}}{y\sqrt{2}} = \frac{x}{y}$ , то завершает доказательство требуемого равенства отношений  $\frac{AK}{KG} = \frac{AL}{LG} = \frac{AM}{MG}$ .

*Критерии.* Приведено полное решение — 7 баллов.

Доказано только, что какие-то три из четырёх прямых проходят через одну точку — 4 балла.

Замеченное, но не доказанное равенство отношений  $\frac{AK}{KG} = \frac{AL}{LG} = \frac{AM}{MG}$  (или какие-то его составных частей), в баллах не оценивается.

Доказано, что какое-то из отношений  $\frac{AK}{KG}$ ,  $\frac{AL}{LG}$ ,  $\frac{AM}{MG}$  равно отношению сторон квадратов, но дальнейших продвижений, приводящих к решению задачи, не сделано, — по 1 баллу за каждое такое доказанное равенство.