

Математика, 7 класс, муниципальный этап

Критерии и методика оценивания

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор одного из случаев методом, позволяющим решить задачу в целом, доказательство леммы, используемой в одном из доказательств, нахождение примера или доказательства оценки в задачах типа «оценка + пример» и т.п.). Наконец, возможны как существенные, так и не влияющие на логику рассуждений логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать все вышеперечисленное.

В соответствии со стандартными правилами проведения математических олимпиад школьников **каждая задача оценивается в целое число баллов от 0 до 7.**

Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице.

| Баллы | Правильность (ошибочность) решения |
|-------|---|
| 7 | Полное верное решение. |
| 6–7 | Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение. |
| 5–6 | Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений. |
| 2–3 | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи. |
| 0–1 | Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении). |
| 0 | Решение неверное, продвижения отсутствуют. |
| 0 | Решение отсутствует. |

Ниже будут приведены критерии к предложенным задачам олимпиады (локальные критерии), содержащие указания к оцениванию (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Такие локальные критерии по отдельным задачам имеют более высокий приоритет по отношению к универсальным критериям.

Важно отметить, что любое правильное (!) решение оценивается в 7 баллов.

Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного или от других решений, известных жюри. При проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается только математическая правильность, корректность, полнота решения; баллы не снижаются за «недостаточную» красоту, оптимальность решения.

Олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются

основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении.

Баллы не выставляются «за старание участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи.

Все решения, если не указано противное, требуют обоснования.

Если решения не совпадают с приведенными, читайте внимательно!

Максимальный балл за все задания олимпиады — 35 баллов.

| №задачи | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Всего |
|---------|---|---|---|---|---|-------|
| Баллы | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 35 |

Решения и указания по проверке

1. Клетчатая таблица 3×3 называется магическим квадратом, если сумма трёх чисел в каждой строке, каждом столбце и каждой из двух диагоналей (из угла в угол) одна и та же. Начали составлять магический квадрат, вписав туда некоторые числа (на чертеже справа). Определите, какое число могло стоять в клетке, отмеченной буквой А. Найдите все возможные варианты и обоснуйте, почему нет других.

| | | |
|---|----|---|
| | | 7 |
| А | | 8 |
| | 10 | 3 |

Ответ: 4.

Решение. Во всех строках, столбцах и диагоналях сумма чисел одинаковая — такая же, как сумма чисел в правом столбце, то есть $7 + 8 + 3 = 18$. Тогда в нижней строке сумма тоже равна 18, поэтому число в левом нижнем углу равно $18 - (10 + 3) = 5$. Сумма чисел в диагонали из левого нижнего угла в правый верхний тоже равна 18, поэтому число в центре квадрата равно $18 - (5 + 7) = 6$. Наконец, сумма чисел во второй строке равна $A + 6 + 8$, что также должно быть равно 18, поэтому $A = 18 - (6 + 8) = 4$ — это единственный возможный ответ. Пример такого квадрата строится (в верхней строке: 9, 2, 7; в средней строке: 4, 8, 6; в нижней строке: 5, 10, 3).

Критерии. Обоснованно получено, что возможен только случай $A = 4$, — 7 баллов.

Если доказано, что при соблюдении условий возможно лишь $A = 4$, но не приведён пример подходящего квадрата, — штраф 1 балл (всё же в условии сказано, что начали составлять такой квадрат — нет гарантии, что он в итоге составится).

Получен верный ответ без обоснования и без примера магического квадрата — 1 балл.

Получен верный ответ и пример подходящего магического квадрата, но нет обоснования, почему вместо А не может стоять другого числа, — 4 балла.

2. На доске были записаны три последовательных натуральных числа. Когда одно из них умножили на 2, сумма всех трёх чисел стала равняться 2024. Чему могла быть равна сумма этих трёх чисел первоначально? (Найдите все возможные варианты и обоснуйте, почему других нет.)

Ответ: 1518.

Решение. Возможны три случая: умножили на 2 первое число (меньшее из трёх), второе число или третье число. Рассмотрим каждый из них.

Если на 2 умножили первое число, то обозначим первое из чисел (до умножения) за x , тогда второе и третье число равны $x + 1$ и $x + 2$ соответственно. По условию задачи $2x + (x + 1) + (x + 2) = 2024$, то есть $4x + 3 = 2024$ — корень этого уравнения нецелый (можно также сказать, что $4x + 3$ нечётное число, а 2024 чётное).

Пусть на 2 умножили второе число. Обозначим его за x , два других равны $x - 1$ и $x + 1$ соответственно. По условию $(x - 1) + 2x + (x + 1) = 2024$, что равносильно $4x = 2024$, откуда $x = 506$. Тогда первоначальная сумма трёх чисел равна $(x - 1) + x + (x + 1) = 3x = 3 \cdot 506 = 1518$.

Наконец, если на 2 умножили третье число, то обозначим его за x , второе равно $x - 1$, а первое равно $x - 2$. По условию $(x - 2) + (x - 1) + 2x = 2024$, откуда $4x - 3 = 2024$ — нет натуральных корней (или так: $4x - 3$ нечётно, а 2024 чётно). Таким образом, из трёх случаев возможен только один — и в нём однозначно получается ответ.

Комментарий. Для нахождения примера во втором случае возможно такое рассуждение: заметим, что подходят числа 505, 506, 507 (их сумма равна 1518, а если среднее число умножить на 2, то будет сумма $505 + 1012 + 507 = 2024$). Если увеличить минимальное из чисел, то остальные тоже увеличатся, а также увеличится удвоенное среднее число, поэтому сумма всех чисел станет больше 2024. Аналогично, если меньшее число уменьшить, то итоговая сумма станет меньше 2024. Поэтому подходит только изначально полученный ответ. Естественно, если в решении используется такой подход, то он засчитывается при условии аккуратного обоснования, а не просто заявления «если изменить числа, то сумма тоже изменится». Также это не отменяет обоснования того, что не могли удвоить первое или третье число. Доказательство, что эти случаи невозможны, также можно провести без введения переменной: если удвоили первое или третье число, то остались неудвоенными два соседних числа — они разной чётности (одно чётное, другое нечётное), поэтому их сумма нечётна, а тогда в сумме с удвоенным числом должны получить нечётную сумму, которая не может равняться 2024.

Критерии. Обоснованно получен верный ответ — 7 баллов.

Обоснованно получено, почему во втором из рассмотренных случаев может быть только такой ответ, — 4 балла.

Получен верный ответ без верного обоснования, но с проверкой, почему он подходит, — 2 балла.

Верный ответ без верного решения и без обоснования, почему он подходит, — 1 балл.

Верно найдены исходные числа, но не найдена их сумма, — штраф 1 балл.

Доказательство, почему не могли быть удвоены первое или третье число, — 3 балла, если рассмотрены оба этих случая, или 1 балл, если рассмотрен только один из этих случаев.

Не считаются верными обоснованиями заявления о том, что других чисел не существует, без доказательства или с выводом, основанном на одном или нескольких частных случаях.

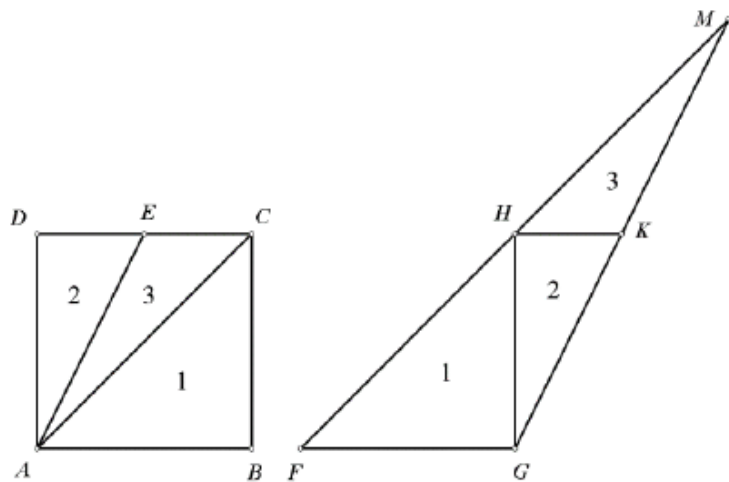
3. Покажите какой-нибудь способ, как разрезать квадрат на такие три треугольника, из которых можно составить тупоугольный треугольник. (Обязательно прокомментируйте, как именно проводятся разрезы и как составить треугольник.)

Решение. Пример приведён на чертеже:

диагональю от квадрата отсекается треугольник 1, а оставшийся треугольник медианой, проведённой к катету, разбивается на треугольники 2 и 3.

Справа показано, как из треугольников 1, 2, 3 составить тупоугольный треугольник. Пример корректен, так как $AD = BC$ (поэтому треугольник 2 можно приставить к треугольнику 1), $EC = ED$ (поэтому короткие стороны

треугольников 2 и 3 также совмещаются), $\angle ACB + \angle ADE + \angle ACE = 45^\circ + 90^\circ + 45^\circ = 180^\circ$ (поэтому на стыке трёх треугольников получается прямая линия), $\angle AED + \angle AEC = 180^\circ$ (поэтому на стыке 2 и 3 треугольников тоже прямая линия), $\angle ABC + \angle DAE > \angle ABC = 90^\circ$ (поэтому получится тупоугольный треугольник).



Критерии. Приведены правильные схемы разрезания и составления — 7 баллов. Присутствует только одна из двух правильных схем (либо показано, как разрезать, либо показано, как составлен треугольник из нужных трёх частей) — 3 балла. За отсутствие обоснования возможности составления треугольника оценка не снижается. Пример разрезания не принимается в любом из следующих случаев: (1) если треугольников не три, (2) если есть нетреугольные части, (3) если составлен не тупоугольный треугольник, (4) если разрезан не квадрат.

4. Маша играет с нейросетью 76 партий в «камень-ножницы-бумага». За победу в одной партии Маша получает 3 очка, нейросеть за победу получает 2 очка, при поражении игрок получает 0 очков, а в случае ничейного исхода оба получают по 1 очку. Оказалось, что нейросеть одержала больше побед, но по количеству очков победила Маша. Какое наибольшее количество ничьих могло состояться?

Ответ: 69

Решение. Пусть Маша одержала x побед, а нейросеть — $x+t$ побед (где t — натуральное число, так как побед у нейросети больше). Маша набрала больше очков, поэтому $3x > 2(x+t)$ (здесь мы не учли ничьи, так как они не влияют на неравенство между набранными очками). Отсюда $x > 2t$, а так как $t \geq 1$, то $x > 2$, поэтому $x \geq 3$. Следовательно, $x+t \geq 4$ (т.е. Маша одержала не менее 3 побед, а нейросеть — не менее 4). Тогда ничейных исходов было не более $76 - 3 - 4 = 69$. Пример строится: пусть Маша одержала 3 победы, нейросеть — 4 победы, а остальные 69 партий закончились вничью.

Комментарий. Пример на 69 ничьих приведён ранее. Можно получить нужную оценку на количество ничьих **полным** перебором. Рассмотрим, какое количество побед могла одержать нейросеть:

- 0 побед: такого быть не может, иначе у Маши отрицательное число побед;
- 1 победа: тогда у Маши 0 побед, поэтому проигрывает по очкам;
- 2 победы: тогда у Маши не больше 1 победы, поэтому нейросеть за победы получает 4 очка, а Маша — не более 3;
- 3 победы: тогда у Маши не больше 2 побед, поэтому нейросеть за победы получает 6 очков, а Маша — не более 6;
- 4 победы: тогда у Маши $x \leq 3$ побед, нейросеть за победы получает 8 очков, а Маша — не более $3x$, что больше 8 лишь при $x = 3$ — случай ранее рассмотрен;
- 5 побед: тогда у Маши $x \leq 4$ побед, нейросеть за победы получает 10 очков, а Маша — не более $3x$, что больше 10 лишь при $x = 4$ — тогда ничьих не более 67;
- не менее 6 побед: тогда у Маши должна быть хотя бы одна победа — тогда ничьих не более 68.

Критерии. Баллы за задачу складываются из оценки (обоснования то ничьих не более 69) и примера (сколько было побед Маши и побед нейросети при 13 ничьих). За **полную** оценку ставится 5 баллов, за верный пример (с верным ответом) — 2 балла. Ответ без примера и верной оценки: 1 балл. Введены обозначения для количества побед Маши и нейросети и составлены соответствующие неравенства, однако дальнейших продвижений нет: ставить 1 балл из оценки. В переборном решении следить за полнотой перебора: неполный перебор — за оценку ставить не более 2 баллов.

5. *Макар и Илья играют в игру, делая ходы по очереди. Первым ходом Макар пишет на доске любую цифру (по своему выбору), а Илья справа дописывает к ней вторую цифру. Каждым следующим ходом игрок стирает первую цифру числа на доске и приписывает справа цифру. После каждого хода (кроме первого хода Макара) на доске должно получаться двузначное **простое** число, которого на предыдущих ходах на доске ещё написано не было. Проигрывает тот, кто не сможет сделать такой ход. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?*

Ответ. Выигрышная стратегия есть у Макара.

Решение. Пусть Макар запишет на доске цифру 9. Тогда Илья вынужден приписать справа цифру 7 (так как среди двузначных чисел, начинающихся на 9, только 97 является простым, а остальные либо чётные, либо составные: 91 делится на 7, 93 и 99 — на 3, 95 — на 5). Теперь пусть Макар сотрёт первую цифру и снова напишет 9 (получится 79 — простое число). И теперь у Ильи нет хода: стерев первую цифру, после 9 он может написать только 7 (как объяснялось ранее), но число 97 уже было.

Критерии. Приведена верная стратегия — 7 баллов, нет верной стратегии — 0 баллов. Верная стратегия должна являться алгоритмом, позволяющим однозначно Макару делать ход в ответ на ход (ходы) Ильи. Если вместо этого предлагается один или несколько примеров розыгрыша (например, в таком стиле: «Если Макар сначала поставит 3, а потом Илья припишет 1, потом Макар напишет 3, а Илья напишет 7, [далее какие-то ещё ходы], то Макар выиграет») — стратегии нет, задача не решена. Если Илья в ответ на ход Макара может написать несколько вариантов цифры, то для Макара следует описать ответный ход на каждый из этих вариантов (опять же, если этого не сделано, то задача не решена).