

Математика, 9 класс, муниципальный этап

Критерии и методика оценивания

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор одного из случаев методом, позволяющим решить задачу в целом, доказательство леммы, используемой в одном из доказательств, нахождение примера или доказательства оценки в задачах типа «оценка + пример» и т.п.). Наконец, возможны как существенные, так и не влияющие на логику рассуждений логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать все вышеперечисленное.

В соответствии со стандартными правилами проведения математических олимпиад школьников **каждая задача оценивается в целое число баллов от 0 до 7.**

Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Ниже будут приведены критерии к предложенным задачам олимпиады (локальные критерии), содержащие указания к оцениванию (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Такие локальные критерии по отдельным задачам имеют более высокий приоритет по отношению к универсальным критериям.

Важно отметить, что любое правильное (!) решение оценивается в 7 баллов.

Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного или от других решений, известных жюри. При проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается только математическая правильность, корректность, полнота решения; баллы не снижаются за «недостаточную» красоту, оптимальность решения.

Олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются

основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении.

Баллы не выставляются «за старание участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи.

Все решения, если не указано противное, требуют обоснования.

Если решения не совпадают с приведенными, читайте внимательно!

Максимальный балл за все задания олимпиады — 35 баллов.

№задачи	1	2	3	4	5	Всего
Баллы	7	7	7	7	7	35

Решения и указания по проверке

1. Каждое утро Петя и Вася выгуливают собак вдоль длинной прямой дороги, соединяющей их дома, двигаясь навстречу друг другу с одинаковыми неизменными скоростями. В понедельник Петя вышел из дома в 5:00, а Вася — в 5:05, в результате они встретились на расстоянии 800 м от дома Пети. Во вторник Петя вышел в 5:05, а Вася — в 5:00, в результате встреча состоялась на расстоянии 400 м от дома Пети. На каком расстоянии от дома Пети они встретятся, если оба выйдут в 5:00?

Ответ: 600 м.

Решение.

Первый способ. Поскольку ситуация, описанная во втором случае, симметрична ситуации в первом случае, то Петя и Вася во втором случае встретятся на расстоянии 800 м от дома Васи, но так как место встречи находится на расстоянии 400 м от дома Пети, то расстояние между их домами равно $400 + 800 = 1200$ м. Если Петя и Вася выйдут одновременно, то за равное время они пройдут равные расстояния, следовательно, встретятся на середине пути, т.е. на расстоянии 600 м от дома Пети.

Второй способ. Пусть v м/мин — скорость движения Пети и Васи, x м — расстояние между домами. В первом случае Петя до места встречи идет $\frac{800}{v}$ мин, а

Вася $\frac{x - 800}{v}$ мин. Разница в затраченном ими времени равна 5 мин, т.е. $\frac{800}{v} - \frac{x - 800}{v} = 5$, отсюда $1600 - x = 5v$. Во втором случае Петя до места встречи идет

$\frac{400}{v}$ мин, а Вася $\frac{x - 400}{v}$ мин. Разница в затраченном ими времени равна 5 мин,

т.е. $\frac{x - 400}{v} - \frac{400}{v} = 5$, отсюда $x - 800 = 5v$. Приравнивая левые части полученных равенств, получим $1600 - x = x - 800$, откуда $2x = 2400$ и $x = 1200$. Если Петя и Вася выйдут одновременно, то встретятся на середине пути, т.е. на расстоянии 600 м от дома Пети.

Критерии. Обоснованно получен верный ответ — 7 баллов.

Только верный ответ без обоснования или с обоснованием, полученном на основе недоказанного предположения о расстоянии между домами, — 2 балла.

Верно составлено уравнение или система уравнений для нахождения расстояния между домами, при этом дальнейшее продвижение отсутствует либо решение неверное — 2 балла (суммируется с верным ответом, если он присутствует).

С помощью верных рассуждений верно найдено расстояние между домами, при этом искомое расстояние не найдено или найдено неверно — 5 баллов.

2. Клетчатая таблица 3×3 называется магическим квадратом, если сумма трёх чисел в каждой строке, каждом столбце и каждой из двух диагоналей (из угла в угол) одна и та же. Составили магический квадрат, но некоторые числа стёрли — осталось только то, что на чертеже справа. Определите, какое число могло стоять в клетке, отмеченной буквой A . Найдите все возможные варианты и обоснуйте, почему нет других.

		7
A		
	10	3

Ответ: 4.

Решение. Обозначим числа, стоящие ещё в некоторых клетках квадрата (см. чертеж) через a , b и c . Тогда сумма чисел в нижней строке равна $a + 10 + 3$, а сумма чисел в диагонали из левого нижнего угла в правый верхний равна $a + b + 7$. По определению магического квадрата $a + 10 + 3 = a + b + 7$, откуда $b = 6$. Сумма чисел в правом столбце равна $7 + c + 3$, поэтому $a + 10 + 3 = 7 + c + 3$, откуда $c = a + 3$. Наконец, сумма чисел во второй строке равна $A + 6 + c$, что равно сумме чисел в нижней строке, то есть $A + 6 + c = a + 10 + 3$, но так как $c = a + 3$, то запишем это так: $A + 6 + (a + 3) = a + 10 + 3$, откуда $A = 4$ — это единственный возможный ответ. Пример такого квадрата строится (в верхней строке: 9, 2, 7; в средней строке: 4, 6, 8; в нижней строке: 5, 10, 3).

		7
A	b	c
a	10	3

Критерии. Обоснованно получено, что возможен только случай $A = 4$, — 7 баллов.

Если доказано, что при соблюдении условий возможно лишь $A = 4$, но не приведён пример подходящего квадрата, — баллы не снижаются.

Получен верный ответ без обоснования и без примера магического квадрата — 1 балл.

Получен верный ответ и пример подходящего магического квадрата, но нет обоснования, почему вместо A не может стоять другого числа, — 3 балла.

3. Аня, Боря и Витя задумали по одному целому числу. Если из числа Бори вычесть число Вити, то получится число Ани. А если число Ани разделить на число Вити, то получится число Бори. Чему могли быть равны задуманные числа? (Найдите все возможные варианты ответа и обоснуйте, почему нет других.)

Ответ. -4 , -2 и 2 .

Решение. Обозначим числа, задуманные Аней, Борей и Витей, как a , b и c соответственно. По условию $a = b - c$ и $b = \frac{a}{c}$ (отсюда сразу следует, что $c \neq 0$). Тогда $a = bc$ и, подставив в первое равенство, получим $bc = b - c$. Дальше можно действовать по-разному.

Первый способ. Перепишем равенство в виде $bc - b + c = 0$, откуда $b(c - 1) + c = 0 \Rightarrow b(c - 1) + (c - 1) = -1 \Rightarrow (b + 1)(c - 1) = -1$. Числа в скобках целые, а получить в произведении -1 можно только перемножением 1 и -1 в каком-то порядке. Отсюда два варианта: (1) $b + 1 = 1$ и $c - 1 = -1$, но тогда $c = 0$, что не подходит; (2) $b + 1 = -1$ и $c - 1 = 1$, откуда $b = -2$ и $c = 2$, а тогда $a = bc = -4$.

Второй способ. Перепишем равенство в виде $bc + c = b$, откуда $c(b + 1) = b$ и $c = \frac{b}{b + 1}$. Тогда $c = \frac{(b + 1) - 1}{b + 1} = 1 - \frac{1}{b + 1}$. Так как c — целое число, то 1 делится на $b + 1$. Следовательно, $b + 1 = 1$ или $b + 1 = -1$. В первом случае $c = 0$, что невозможно, во втором $b = -2$ и $c = 2$, откуда $a = bc = -4$.

Третий способ. Так как bc делится на c и c делится на c , то $b = bc + c$ делится на c . Аналогично показывается, что c делится на b . Тогда b и c делятся друг на друга, поэтому они или равны, или противоположны. Если $b = c$, то $a = b - c = 0$ и $b = \frac{a}{c} = \frac{0}{c} = 0$. Но тогда $c = 0$ (оно равно b), что невозможно. Следовательно, $b = -c$. Подставим в равенство $bc = b - c$: $-c^2 = -c - c$, откуда $c^2 - 2c = 0$. Это уравнение имеет корни 0 (но $c \neq 0$) и 2 . Тогда $c = 2$, $b = -c = -2$, $a = bc = -4$.

Критерии. Обоснованно получен верный ответ — 7 баллов.

Только верный ответ без обоснования — 1 балл.

Получена верная формула, выражающая одну из переменных через одну другую (например, b через c), после чего угадано верное значение переменной (или приведено без верного обоснования), при этом не доказано, почему целочисленные значения получаются только при таких значениях переменной — 4 балла.

4. При каких натуральных значениях n можно подобрать такие числа n чисел, ни одно из которых не равно 0, чтобы их сумма была положительной, а сумма их кубов — отрицательной? Найдите все возможные ответы и обоснуйте, почему нет других.

Ответ. Все значения $n \geq 3$.

Решение. При $n = 1$ таких чисел (такое число) не подобрать: оно должно быть положительным, но тогда и куб будет положительным, а по условию нужно отрицательное значение.

При $n = 2$ таких чисел также не существует: действительно, если $a_1 + a_2 > 0$, то $a_1 > -a_2$, но тогда и для кубов будет верно, что $a_1^3 > (-a_2)^3$, откуда $a_1^3 > -a_2^3$ и $a_1^3 + a_2^3 > 0$, а нужно отрицательное значение.

При $n = 3$ существует пример: можно взять числа $a_1 = -1$ и $a_2 = a_3 = \frac{2}{3}$. Тогда $a_1 + a_2 + a_3 = -1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3} > 0$, однако $a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 = -1 + \frac{8}{27} + \frac{8}{27} = \frac{11}{27} < 0$.

При любом $n > 3$ также есть верный пример: можно взять числа $a_1 = -1$ и $a_2 = \dots = a_n = \frac{1}{n-2}$. Тогда $a_1 + a_2 + \dots + a_n = -1 + (n - 1) \cdot \frac{1}{n-2} = \frac{1}{n-2} > 0$, однако $a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 = -1 + (n - 1) \cdot \frac{1}{(n-2)^3} = -1 + \frac{(n-2)+1}{(n-2)^3} = -1 + \frac{1}{(n-2)^2} + \frac{1}{(n-2)^3} \leq -1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} < 0$.

Критерии. Обоснованно получен верный ответ — 7 баллов.

Верно показано, что для $n = 2$ таких чисел не существует — 2 балла.

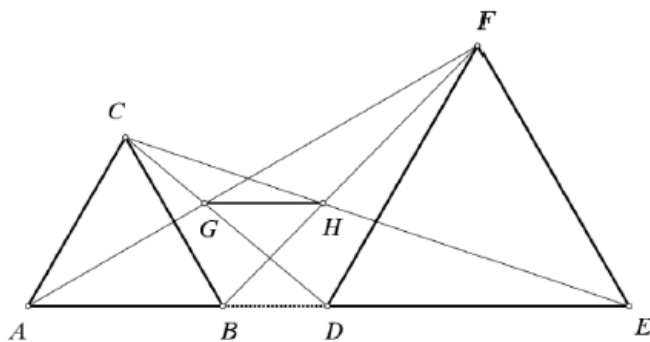
Приведён верный пример для $n = 3$ — 2 балла.

Приведён верный обоснованный пример для всех $n > 3$ — 3 балла.

Если выполнены 2 из трёх пунктов выше, то баллы за пункты суммируются. За пример с нулевыми числами баллы не начисляются. Ответ без примера не засчитывается.

5. На прямой ℓ отмечены точки A, B, D, E (в этом порядке). В одной полуплоскости относительно ℓ отметили точки C и F так, что треугольники ABC и DEF равносторонние. Пусть отрезки AF и CD пересекаются в точке G , а отрезки CE и BF — в точке H . Докажите, что $AE \parallel GH$.

Решение. Пусть $AB = BC = AC = a$, $DE = EF = DF = b$. Так как $\angle CAE = \angle FDE = 60^\circ$ и $\angle CBA = \angle FEA = 60^\circ$, то $AC \parallel DF$ и $BC \parallel EF$. Тогда $\angle CAG = \angle DFG$ как накрест лежащие при параллельных AC и DF и секущей AF , аналогично $\angle ACG = \angle FDG$. Следовательно, треугольники ACG и FDG подобны (по двум углам), поэтому $\frac{AG}{GF} = \frac{AC}{DF} = \frac{a}{b}$. Аналогично доказывается подобие треугольников BCH и FEH , откуда $\frac{BH}{HF} = \frac{BC}{EF} = \frac{a}{b}$. Таким образом, $\frac{AG}{GF} = \frac{BH}{HF}$, откуда по обратной теореме о пропорциональных отрезках следует параллельность AE и GH .



Критерии. Приведено полное решение — 7 баллов.

Доказано, что одно из отношений $\frac{AG}{GF}, \frac{CG}{GD}, \frac{CH}{EH}, \frac{BH}{HF}$ равно $\frac{AB}{DE}$ (отношению сторон равносторонних треугольников) без дальнейших продвижений — 2 балла.

Доказано, что $\frac{AG}{GF} = \frac{BH}{HF}$ или $\frac{CG}{GD} = \frac{CH}{HE}$ без дальнейших продвижений — 5 баллов.

Возможно счётное решение в координатах — необходимо следить за корректностью выкладок и обоснованностью вычисления координат точек.