ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКА

И. Р. Высоцкий

ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

8–9 классы

БАЗОВЫЙ И УГЛУБЛЕННЫЙ УРОВЕНЬ

ОГЭ и ЕГЭ

- Задачи для работы в классе
- Домашние задания
- Самостоятельные и контрольные работы
- Индивидуальные карточки
- Справочник
- Примерная программа, планирование

И. Р. Высоцкий

Дидактические материалы по теории вероятностей

8—9 классы

Электронное издание

Москва
Издательство МЦНМО
2018

УДК 372.851
ББК 22.17я72
В93

Высоцкий И. Р.
Дидактические материалы по теории вероятностей.
8—9 классы.
Электронное издание.
М.: МЦНМО, 2018.
224 с.
ISBN 978-5-4439-3240-8

Настоящее пособие содержит материалы для курса теории вероятностей в 8—9 классах общеобразовательных школ. Задачи систематизированы по типам и методам решения; каждый тип задач снабжен примером возможного решения или подробными указаниями. Особое внимание уделяется универсальным методам — построению дерева вероятностей и графическим представлениям случайных экспериментов.

Пособие составлено с учетом малого количества опыта школьного преподавания этой дисциплины и охватывает все значимые темы вплоть до первичного изучения случайных величин.

Пособие содержит материалы для работы в классе, домашние задания, самостоятельные и контрольные работы, а также индивидуальные карточки. Пособие адресовано учителям математики, школьникам и родителям и позволяет подготовить учащихся к итоговым контрольным работам, ОГЭ и ЕГЭ.

Подготовлено на основе книги:
Высоцкий И. Р. Дидактические материалы по теории вероятностей. 9—8классы. — М.: МЦНМО, 2018. — 224 с. — ISBN 978-5-4439-1240-0

12+

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499)241-08-04.
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-3240-8

Для учителя

Назрела необходимость, обобщив накопившийся опыт, превратить изучение теории вероятностей в школе в систему с простыми учебными элементами и ясными итоговыми требованиями, как в курсе алгебры. Попытка сделать это предпринята здесь.

Пособие предназначено в основном для использования на уроках математики и для подготовки к ним. Автор учитывал, что опыта преподавания элементов теории вероятностей в российской школе мало. Поэтому каждый тип задач снабжён примером возможного решения или указаниями.

Пособие содержит много (избыточно много) задач, позволяющих учителю выстроить классную и домашнюю работу, провести самостоятельные и контрольные работы, подготовить учащихся к итоговым контрольным работам по теории вероятностей, к ОГЭ и ЕГЭ.

При составлении пособия использовался выраженный некомбинаторный подход: для решения задач не требуются предварительные сведения о факториалах, числах сочетаний и т. п. Необходимые коэффициенты содержатся в таблице. Лишь в некоторых задачах повышенной трудности требуется использовать формулу для числа сочетаний.

В пособии 3 раздела, всего 11 параграфов. Темы параграфов соответствуют действующему образовательному стандарту и примерным образовательным программам основной школы (34 или 68 часов за два года). Отсутствует параграф, посвящённый геометрической вероятности. В каждый параграф включено несколько задач повышенной трудности.

Темы, контролируемые в действующих моделях ОГЭ и ЕГЭ, представлены в трёх первых разделах.

Числа в задачах по возможности подобраны так, чтобы избежать громоздких вычислений, однако учащимся **разрешается пользоваться калькулятором**. Он необходим при решении задач § 6 и 7, где требуется возводить дроби в степени даже после упрощений.

В каждой теме предложены самостоятельные работы, а также индивидуальные карточки, с помощью которых учитель может организовать индивидуальную работу с мотивированными учащимися. К каждому разделу дана примерная контрольная работа.

Каждая самостоятельная работа приведена в двух равноценных вариантах и рассчитана на 20 минут. Каждая контрольная работа рассчитана на 45 минут и содержит шесть задач в порядке возрастания сложности.

Домашние и классные задачи не отличаются по уровню сложности. Каждая карточка для индивидуальной работы содержит две задачи: первая среднего уровня сложности, вторая — сложная.

Римская цифра в обозначении контрольной работы указывает раздел. Арабская цифра — номер варианта. Работа КI составлена в четырёх вариантах: два первых предназначены для проверки начальных базовых знаний, достаточных для успешного решения задач итоговой аттестации. Варианты 3 и 4 содержат более содержательные задачи. Работы КII и КIII составлены в двух вариантах каждая.

Использованные обозначения: **С** — самостоятельная работа, **К** — контрольная работа, **И** — карточка для индивидуальной работы, $*$ — задача повышенной сложности.

В конце пособия дана примерная программа курса вероятности и статистики, вариант планирования с привязкой к параграфам этого пособия, а также небольшой справочник. Термины, разъясняемые в справочнике, в тексте пособия выделены курсивом.

Автор благодарен В. С. Шклярнику, А. В. Семенову, О. А. Виноградовой за помощь в подготовке сборника.

Автор будет благодарен всем, кто использует сборник, и будет особенно признателен — за отзывы, замечания и предложения, которые можно оставить на сайте лаборатории методики вероятности МЦНМО: `http://ptlab.mccme.ru`.

Раздел I
Случайные события

§1. Классические случайные эксперименты с монетами и игральными костями

Пояснение. Опыты с равновозможными элементарными событиями в жизни практически не встречаются. Это игры — лотереи, жребии и т. п. Теория вероятностей произошла от подсчёта шансов в играх, но давно вышла за рамки игровых экспериментов. Однако классические вероятностные модели — монета и игральные кубики (кости), жребии и знаменитые урны с шарами — остаются важным учебным элементом и частью научной культуры. Во-первых, потому что в этих экспериментах заранее известны вероятности элементарных исходов. Но главное — потому что эти эксперименты, несмотря на простоту, позволяют моделировать гораздо более важные и сложные вероятностные ситуации.

С дидактической точки зрения эксперименты с костями и монетами позволяют выработать первичные навыки вычисления вероятностей и увидеть смысл формул и фактов.

Во всех этих опытах множество элементарных событий эксперимента определяется естественной организацией эксперимента. Если бросают одну монету, то исходов два — орёл и решка, если монету бросают дважды, то элементарных событий четыре. При бросании одной кости их шесть, а при двукратном бросании кости элементарных событий $6 \cdot 6 = 36$.

Обратим внимание на то, что лучше говорить о двукратном бросании монеты, а не о двух монетах. Лучше говорить о двукратном бросании игральной кости, а не о бросании двух костей. Это связано с тем, что при двукратном бросании легко различить последовательность выпадений. При однократном бросании двух монет или костей, для того чтобы различать исходы, придется считать, что кости разного цвета, а монеты, например, разного достоинства.

Задачи для работы в классе

1. Симметричную монету бросили два раза.

а) Сколько элементарных исходов в этом эксперименте? Выпишите их все с помощью кратких обозначений: О — «орёл» и Р — «решка».

б) Выпишите элементарные исходы, благоприятствующие событию «выпал хотя бы один орёл».

2. Симметричную монету бросили два раза. Запишите перечислением элементарных исходов в фигурных скобках событие

$$A = \{\text{в первый раз выпал орёл}\}.$$

3. Симметричную монету бросили два раза. Запишите перечислением элементарных исходов в фигурных скобках событие:

а) $A=\{$оба раза выпало одно и то же$\}$;

б) $B=\{$решка выпала хотя бы один раз$\}$.

Пример решения. а) $A=\{ОО, РР\}$; б) $B=\{ОР, РО, РР\}$.

4. Симметричную монету бросили три раза. Сколько всего элементарных исходов в таком эксперименте? Запишите их все.

5. Симметричную монету бросили три раза. Запишите перечислением элементарных исходов в фигурных скобках событие:

а) $A=\{$во второй раз выпал орёл$\}$;

б) $B=\{$ни разу не случились две решки подряд$\}$.

6. Симметричную монету бросили два раза. Опишите словами событие:

а) $C=\{ОР, РР\}$; б) $D=\{ОР, РО, РР\}$.

7. Симметричную монету бросили три раза. Опишите словами событие:

а) $A=\{ООР, ОРО, РОО\}$; б) $B=\{ООО, ОРО\}$.

8. Симметричную монету бросили два раза. Найдите вероятность события $A=\{$в первый раз выпал орёл$\}$.

Пример решения. Всего равновозможных элементарных исходов четыре: $N=4$.

Событию A благоприятствуют два исхода: ОО и ОР, $N(A)=2$.

Поэтому

$$\mathrm{P}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{2}{4} = 0{,}5.$$

9. Симметричную монету бросили два раза. Найдите вероятность события:

а) $B=\{$во второй раз выпала решка$\}$;

б) $C=\{$решка выпала хотя бы один раз$\}$.

10. Симметричную монету бросили три раза. Найдите вероятность события $A = \{$первые два броска окончились одинаково$\}$.

Пример решения. Всего элементарных событий $N = 8$;

$$A = \{\text{ООО, ООР, РРО, РРР}\}, \quad N(A) = 4, \quad \mathrm{P}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{4}{8} = 0{,}5.$$

11. Симметричную монету бросили три раза. Найдите вероятность события:

а) $A = \{$выпал хотя бы один орёл$\}$;

б) $B = \{$выпала одна или две решки$\}$.

12. Симметричную монету бросили три раза. Найдите вероятность события:

а) $A = \{$орлы и решки чередовались$\}$;

б) $B = \{$решка выпала ровно два раза$\}$.

13. Правильную игральную кость бросают один раз.

а) Что является элементарным исходом в этом эксперименте? Сколько их всего?

б) Запишите перечислением элементарных исходов событие

$$A = \{\text{выпало нечётное число очков}\}.$$

Пример решения. а) Число выпавших очков; их шесть; б) $A = \{1, 3, 5\}$.

14. Правильную игральную кость бросают один раз. Запишите перечислением элементарных исходов событие:

а) $M = \{$выпало не больше чем 3 очка$\}$;

б) $N = \{$выпавшее число очков кратно числу 3$\}$.

15. Правильную игральную кость бросают один раз. Опишите словами событие:

а) $A = \{2, 4, 6\}$; б) $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

16. Правильную игральную кость бросают один раз. Найдите вероятность события:

а) $A = \{$выпало нечётное число очков$\}$;

б) $B = \{$выпавшее число очков не меньше пяти$\}$.

17. Правильную игральную кость бросают дважды.

а) Что является элементарным исходом в этом эксперименте?

б) Сколько элементарных исходов в этом эксперименте?

18. Правильную игральную кость бросают дважды. Изобразите таблицу эксперимента, в которой номер строки — это результат первого броска, а номер столбца — результат второго броска. В таблице отметьте элементарные события (3; 2), (1; 6) и (6; 1).

Пример решения. Построим таблицу эксперимента. Нужные исходы пометим крестиком.

	1	2	3	4	5	6
1						×
2						
3		×				
4						
5						
6	×					

19. Правильную игральную кость бросают дважды. Отметьте следующие события в таблице эксперимента и найдите их вероятности:

а) элементарное событие (4; 2);

б) событие $B = \{(4; 2), (5; 1), (1; 5)\}$.

20. Правильную игральную кость бросают дважды. Отметьте в таблице эксперимента событие A и найдите его вероятность, если:

а) $A = \{(6; 3), (5; 2), (1; 4), (6, 1)\}$;

б) $A =$ {один раз выпало 4, а другой раз выпало 5}.

Указание. Решая п. б), не смешивайте события «один раз 4, а другой раз 5» и «первый раз 4, а второй раз 5». В первом случае нет указания, что 4 выпало именно в первый раз.

21. Правильную игральную кость бросают дважды.

а) Запишите перечислением элементарные исходы, благоприятствующие событию $A =$ {сумма выпавших очков равна 5}.

б) Отметьте это событие в таблице эксперимента.

22. Правильную игральную кость бросают дважды. В таблице эксперимента отметьте элементарные исходы, благоприятствующие событию:

а) $A =$ {сумма выпавших очков равна 8};

б) $B =$ {результат первого броска больше результата второго на 2}.

23. Правильную игральную кость бросают дважды. Опишите словами событие, отмеченное в таблице эксперимента:

а)

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						×
4					×	
5				×		
6			×			

;

б)

	1	2	3	4	5	6
1				×		
2					×	
3						×
4	×					
5		×				
6			×			

.

24. Правильную игральную кость бросают дважды. Найдите вероятность события $A = \{$сумма выпавших очков равна 8$\}$.

Пример решения. Отметим событие A в таблице эксперимента. Всего равновозможных исходов $N = 36$. Событию A благоприятствуют $N(A) = 5$ исходов, $\mathrm{P}(A) = \dfrac{5}{36}$.

	1	2	3	4	5	6
1						
2						×
3					×	
4				×		
5			×			
6		×				

25. Правильную игральную кость бросают дважды. Найдите вероятность события:

а) $A = \{$сумма выпавших очков равна 7$\}$;

б) $B = \{$во второй раз выпало на 1 больше, чем в первый$\}$.

26. Правильную игральную кость бросают дважды. Найдите вероятность события:

а) $M = \{$сумма выпавших очков меньше девяти$\}$;

б) $N = \{$произведение чисел выпавших очков равно 12$\}$.

27. Правильную игральную кость бросают дважды. Найдите вероятность события:

а) $K = \{$выпавшие очки отличаются меньше чем на 2$\}$;

б) $L = \{$числа выпавших очков отличаются больше чем на 3$\}$.

28. Правильную игральную кость бросают дважды. Известно, что сумма выпавших очков равна 8. Найдите вероятность события «в первый раз выпало не больше чем 5».

Пример решения. В таблице эксперимента видно, что всего возможно $N = 5$ элементарных исходов (закрашены серым цветом). Событию $A = \{$в первый раз не более 5$\}$ благоприятствуют $N(A) = 4$ из них (помечены крестиками). Значит, $\mathrm{P}(A) = \dfrac{N(A)}{N} = 0{,}8$.

	1	2	3	4	5	6
1						
2						×
3					×	
4				×		
5			×			
6						

29*. Правильную игральную кость бросают дважды. Известно, что сумма выпавших очков меньше шести. Найдите вероятность события:

а) «в первый раз выпало 2 очка»;

б) «сумма выпавших очков равна 5».

Задания для домашней работы

30. Симметричную монету бросили два раза. Найдите вероятность события:

а) $A = \{$во второй раз выпал орёл$\}$;

б) $C = \{$результаты бросаний не одинаковы$\}$.

31. Симметричную монету бросили три раза. Найдите вероятность события:

а) $A = \{$в первый и третий раз результаты бросаний одинаковы$\}$;

б) $B = \{$результаты не всех бросаний одинаковы$\}$.

32. Правильную игральную кость бросают один раз. Найдите вероятность события:

а) $A = \{$выпавшее число очков не больше чем 5$\}$;

б) $B = \{$выпало число от двух до четырёх$\}$.

33. Правильную игральную кость бросают дважды. Найдите вероятность события:

а) $A = \{$сумма выпавших очков равна 4$\}$;

б) $B = \{$выпавшие числа отличаются на 1 или на 2$\}$.

34*. Правильную игральную кость бросают дважды. Известно, что сумма выпавших очков равна 9. Отметьте в таблице эксперимента событие «в первый раз выпало больше чем 3 очка» и найдите его вероятность.

35*. Правильную игральную кость бросают дважды. Известно, что сумма выпавших очков больше 8. Отметьте в таблице эксперимента событие «во второй раз выпало число 4» и найдите его вероятность.

§ 2. Опыты с равновозможными элементарными исходами

Пояснение. Уже отмечалось, что опыты с равновозможными элементарными событиями в жизни встречаются редко. Как правило, они искусственно организованы для уравнивания шансов в разного рода соревнованиях или при разделе каких-либо благ. Любые серьёзные вероятностные задачи требуют математического аппарата, которого нет у школьников. С другой стороны, нельзя в обучении ограничиться игровыми опытами: это создаёт ложное впечатление, что теория вероятностей — это наука про игры.

Составители ЕГЭ понимают эту дилемму и пытаются найти в жизни сюжеты, где равновозможные исходы оправданы. Таким образом, в банке заданий ЕГЭ и ОГЭ много задач, где главную роль играет жребий, обеспечивающий равновозможность элементарных событий, либо случайный выбор.

При решении всех задач этого параграфа нужно определить, что представляет собой элементарный исход эксперимента, сколько всего этих исходов и какие из них и сколько благоприятствуют нужному событию.

Задачи для работы в классе

36. В случайном эксперименте 8 элементарных равновозможных событий. Событию A благоприятствует 5 из них. Найдите вероятность события A.

Пример решения. Общее число элементарных исходов $N = 8$. Событию A благоприятствуют $N(A) = 5$ исходов. Поэтому

$$\mathrm{P}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{5}{8} = 0{,}625.$$

37. В случайном эксперименте 12 элементарных равновозможных событий. Найдите вероятность события A, если этому событию благоприятствуют:

а) 3 элементарных события;

б) 4 элементарных события;

в) 9 элементарных событий.

38. Дима, Марат, Петя, Надя и Света бросили жребий — кому достанется единственная конфета. Найдите вероятность того, что выиграет девочка.

Пример решения. Элементарный исход в этом эксперименте — участник жребия. Всего элементарных исходов $N = 5$. Все исходы равновозможны.

Событию $A = \{\text{девочка}\}$ благоприятствуют $N(A) = 2$ элементарных исхода: «Надя» и «Света». Поэтому

$$\mathrm{P}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{2}{5} = 0{,}4.$$

39. В кармане у Дани было пять конфет — «Мишка», «Маска», «Белочка» и две конфеты «Взлётная», а также ключи от квартиры. Вынимая ключи, Даня случайно выронил из кармана одну конфету. Найдите вероятность того, что потерялась конфета «Взлётная».

40. В группе туристов 6 человек. С помощью жребия они выбирают двоих, кто пойдёт в село за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин?

41. Пассажир по телефону заказывает такси в фирме «Удача». В фирме в этот момент работают 65 машин; 26 из них белые, остальные жёлтые. Найдите вероятность того, что на вызов приедет машина жёлтого цвета.

42. В сборнике билетов по биологии всего 27 билетов, в 12 из них встречается вопрос по курсу ботаники. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете не окажется ни одного вопроса по ботанике.

43. В чемпионате по гимнастике участвуют 76 спортсменок: 30 из России, 27 из Казахстана, остальные из Белоруссии. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Белоруссии.

Пример решения. Элементарным исходом в эксперименте является спортсменка, которая выступает первой. Всего элементарных исходов $N = 76$, из них событию $A = \{\text{первой выступает спортсменка Белоруссии}\}$ благоприятствуют $N(A) = 76 - 30 - 27 = 19$. Все элементарные исходы равновозможны, поэтому

$$\mathrm{P}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{19}{76} = 0{,}25.$$

44. На олимпиаде по физике 400 участников разместили в трёх аудиториях. В первых двух удалось разместить по 130 человек, оставшихся перевели в запасную аудиторию в другом корпусе. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории.

45. Научная конференция проводится в 4 дня. Всего запланировано 32 доклада — первые два дня по 6 докладов, остальные распределены поровну между третьим и четвёртым днями. На конференции планируется доклад профессора М. Порядок докладов определяется жребием. Какова вероятность того, что доклад профессора М. окажется запланирован на последний день конференции?

46. В соревнованиях по толканию ядра участвуют 6 спортсменов из Греции, 4 спортсмена из Болгарии, 3 спортсмена из Румынии и 7 — из Венгрии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, выступающий последним, окажется из Венгрии.

Пример решения. Элементарным исходом в эксперименте является спортсмен, который выступает последним. Всего элементарных исходов $N = 6 + 4 + 3 + 7 = 20$, из них событию $A = \{$последним выступает спортсмен из Венгрии$\}$ благоприятствуют $N(A) = 7$. Все элементарные исходы равновозможны, поэтому

$$\mathrm{P}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{7}{20} = 0{,}35.$$

47. На семинар приехали 3 учёных из Финляндии, 7 из Венгрии и 5 из Румынии. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что первым окажется доклад учёного из Финляндии.

48. На рок-фестивале выступают группы — по одной от каждой из заявленных стран. Порядок выступления определяется жребием. Какова вероятность того, что группа из Франции будет выступать после группы из Англии и после группы из России? Результат округлите до сотых.

Пример решения. Нам не важно, когда выступают остальные группы и как они распределились между собой. Важен лишь порядок трёх групп из Англии (А), Франции (Ф) и России (Р). Поэтому элементарным исходом в эксперименте будем считать порядок выступления этих групп: ФАР, ФРА, РАФ, РФА, АФР, АРФ. Таким образом, всего элементарных исходов $N = 6$, из них событию $B = \{$Франция после Англии и после России$\}$ благоприятствуют исходы РАФ и АРФ (неважно, в каком порядке выступают группы из Англии и России, Франция должна выступать после них), т. е. $N(B) = 2$. Все элементарные исходы равновозможны, поэтому

$$\mathrm{P}(A) = \frac{N(B)}{N} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

49. На фестивале КВН выступают команды — по одной от каждого из представленных городов. Порядок выступления определяется жребием. Какова вероятность того, что команда из Самары будет выступать после команды из Саратова, но раньше команды из Новосибирска?

50. Какова вероятность того, что последние две цифры телефонного номера случайного абонента совпадают?

Пример решения. Элементарный исход в этом эксперименте — пара цифр. Всего элементарных исходов $N=100$: от (00) до (99).

Событию $A=\{$цифры совпали$\}$ благоприятствуют $N(A)=10$ элементарных исходов: (00), (11), (22) и т. д. до (99). Все исходы равновозможны. Поэтому $\mathrm{P}(A)=\dfrac{N(A)}{N}=\dfrac{10}{100}=0{,}1$.

51. Клиент получает в банке кредитную карту. Четыре последних цифры номера карты случайные. Какова вероятность того, что эти последние четыре цифры идут подряд по возрастанию, например 0123 или 4567?

52. В чемпионате мира по футболу участвуют 16 команд. С помощью жребия их нужно разделить на четыре группы по четыре команды в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами: четыре карточки с номером 1, четыре — с номером 2, четыре — с номером 3 и четыре карточки с номером 4. Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда Бразилии окажется в третьей группе?

53. В чемпионате мира участвуют 16 футбольных команд, в том числе — сборные Бразилии и Италии. С помощью жребия их делят на четыре группы по четыре команды в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами: четыре карточки с номером 1, четыре — с номером 2, четыре — с номером 3 и четыре карточки с номером 4. Капитаны команд тянут по одной карточке. Известно, что команда Бразилии оказалась в группе № 3. Какова вероятность того, что команда Италии окажется в группе № 2?

Пример решения. Элементарный исход в этом эксперименте — карточка, которую вытянул капитан итальянской команды. Известно, что Бразилии досталась одна из карточек с номером 3. Поэтому осталось $N=16-1=15$ карточек. Из них четыре карточки благоприятствуют событию $A=\{$команда Италии попадёт в группу № 2$\}$: $N(A)=4$. Все исходы равновозможны. Поэтому

$$\mathrm{P}(A)=\frac{N(A)}{N}=\frac{4}{15}.$$

54. В чемпионате мира участвуют 16 команд, в том числе — сборные Бразилии и России. С помощью жребия их делят на четыре группы по четыре команды в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами: четыре карточки с номером 1, четыре — с номером 2, четыре — с номером 3 и четыре карточки с номером 4. Капитаны команд тянут по одной карточке. Известно, что команда Бразилии оказалась в группе № 3. Какова вероятность того, что команда России окажется в той же группе?

55. Футбольная команда «Квадрат» по очереди проводит два товарищеских матча с командами «Треугольник» и «Пирамида». В начале каждого матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнёт игру, т. е. будет первая владеть мячом. Какова вероятность того, что «Квадрат» оба раза будет начинать игру?

Указание. Предположим, что капитан команды «Квадрат» выигрывает, если выпадает орёл. Тогда эксперимент сводится к двукратному бросанию монетки, а интересующее нас событие — ОО.

56. Хоккейная команда «Шайба» по очереди проводит три товарищеских матча с командами «Гайка», «Болт» и «Эксцентрик». В начале каждого матча судья вбрасывает шайбу между клюшками капитанов играющих команд. Будем считать, что вероятность выиграть вбрасывания у капитанов всех четырёх команд одинаковая. Какова вероятность того, что капитан команды «Шайба» выиграет ровно два вбрасывания из трёх?

57*. В классе 26 человек, среди них два друга — Сергей и Павел. Учащихся случайным образом разбивают на две равные группы. Найдите вероятность того, что Сергей окажется в той же группе, в которой оказался Павел.

Пример решения. Павлу уже досталось какое-то место в какой-то группе. Осталось выбрать место только для Сергея. Таким образом, элементарный исход в этом эксперименте — выбор места, которое достанется Сергею. В группе, в которую попал Павел, осталось 12 свободных мест из 25. Поэтому $N = 25$, а событию «Сергей оказался в той же группе, что и Павел» благоприятствуют $N(A) = 12$ из них. Все исходы равновозможны. Поэтому

$$\mathrm{P}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{12}{25} = 0{,}48.$$

58*. В классе 26 человек, среди них два друга — Сергей и Павел. Учащихся случайным образом разбивают на две равные группы. Найдите вероятность того, что Сергей и Павел окажутся в одной группе.

Указание. Если считать, что элементарный исход — выбор двух мест для Сергея и Павла, то задача получается со сложным множеством элементарных исходов. Упростим её. Будем считать, что Павел уже попал в какую-то группу. Задача сводится к задаче 57.

59*. В группе 51 человек, среди них Алексей и Пётр. Группу случайным образом разбивают на три равные по численности команды. Найдите вероятность того, что Алексей и Пётр попадут в одну команду.

60*. В кармане у Маши 6 монет: все по 1 рублю, кроме двух монет достоинством 2 рубля. На ощупь монеты неотличимы. Маша не глядя достаёт из кармана три монеты. Найдите вероятность того, что Маша достала только одну из двухрублёвых монет.

Указание. Удобно считать, что двухрублёвые монеты как-то отличаются друг от друга. Например, одна из них этого года выпуска, а другая прошлого. Тогда задача становится похожа на задачу 58 про Сергея и Павла, которые должны попасть в одну группу.

61*. За круглый стол на 9 стульев в случайном порядке рассаживаются 7 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что обе девочки не окажутся за столом рядом.

Пример решения. Вместо выбора двух мест для двух девочек будем считать, что первая девочка уже села на какой-то стул. Задача сводится к выбору места для второй девочки. Всего свободных мест осталось 8, а рядом с первой девочкой 2 места. Следовательно, искомая вероятность равна $1-\frac{2}{8}=0{,}75$.

62*. В круг, взявшись за руки, в случайном порядке встали 14 детей, среди них Оля и Серёжа. Найдите вероятность того, что они не стоят рядом.

Задания для домашней работы

63. В случайном эксперименте 20 элементарных равновозможных событий. Найдите вероятность события A, если этому событию благоприятствуют:

а) 5 элементарных событий;

б) 8 элементарных событий;

в) 18 элементарных событий.

64. Клиент в магазине покупает шариковую ручку. На полке 40 ручек, 8 из них плохо пишут (или не пишут). Найдите вероятность того, что первая случайно выбранная ручка пишет хорошо.

65. На столе у преподавателя 32 экзаменационных билета по теории вероятностей. Студент выучил ответы на все вопросы, кроме вопросов по теме «Случайные величины». Известно, что вопросы по этой теме встречаются в 12 билетах. Найдите вероятность того, что при случайном выборе студенту достанется билет, в котором нет вопроса о случайных величинах.

66. Несколько человек случайным образом встали в электронную очередь, получив талончики с номерами. Среди них Анна, Сергей и Пётр. Какова вероятность того, что номер талона у Анны меньше, чем номер у Сергея, и меньше, чем у Петра?

67. На конкурс школьных проектов подано 6 проектов из Москвы, 5 из Санкт-Петербурга, 4 из Якутии и 1 проект из Самарской области. Участники защищают свои проекты перед жюри конкурса. Порядок защиты определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что третьим по счёту окажется доклад школьника из Якутии.

68. Сергей получает паспорт. Последние три цифры паспорта случайные. Найдите вероятность того, что последние три цифры — это цифры 1, 2 и 3 в каком-то порядке.

69. В чемпионате мира по хоккею участвуют 16 сборных команд. С помощью жребия их делят на две одинаковые по численности группы. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами: восемь карточек с буквой A и восемь карточек с буквой B. Капитаны команд тянут по одной карточке. Известно, что команда Финляндии оказалась в группе B. Найдите вероятность того, что команда России окажется в группе A.

70*. Два автомобилиста независимо друг от друга выезжают из пункта A в пункт B. Навигатор предлагает каждому из них 4 примерно равноценных маршрута, и автомобилисты выбирают маршрут случайным образом. Найдите вероятность того, что автомобилисты выберут один и тот же маршрут.

§ 3. Решение задач с помощью координатной прямой

Пояснение. Привычная школьнику координатная прямая служит хорошей моделью для некоторых вероятностных задач. Эти задачи связаны со случайными величинами, хотя о них ещё нет и речи. Зная, как события связаны между собой и зная вероятность некоторых из них, с помощью числовой прямой можно найти вероятности других событий. Другой тип задач — сравнение вероятностей событий. Если первое событие является подмножеством второго, то вероятность второго события не меньше вероятности первого. Здесь прослеживается аналогия с решением неравенств.

Задачи для работы в классе

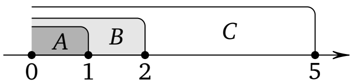
71. Аня ждёт автобуса на остановке. Какое из событий наиболее вероятно:

$A = \{$автобус придёт меньше чем через минуту$\}$,

$B = \{$автобус придёт меньше чем через две минуты$\}$,

$C = \{$автобус придёт меньше чем через пять минут$\}$?

Пример решения. Изобразим события на числовой прямой.



Событие C включает в себя события A и B. Поэтому вероятность события C самая большая из всех трёх (по крайней мере, не меньше двух других).

72. Мама измеряет температуру воды для купания ребёнка. Расположите события в порядке возрастания их вероятностей:

$A = \{$температура не ниже $35{,}5\,^\circ$C$\}$,

$B = \{$температура не ниже $36{,}2\,^\circ$C$\}$,

$C = \{$температура не ниже $36\,^\circ$C$\}$.

73. На хлебозаводе производится контрольное взвешивание испечённой буханки хлеба. Среди предложенных событий выберите событие с наименьшей вероятностью:

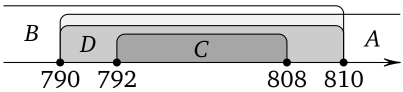
$A = \{$масса больше 790 г$\}$,

$B = \{$масса меньше 810 г$\}$,

$C = \{$масса от 792 до 808 г$\}$,

$D = \{$масса от 790 до 810 г$\}$.

Пример решения. Изобразим события на числовой прямой.



На рисунке видно, что событие C является подмножеством всех других событий, т. е. вероятность события C не больше, чем у всех остальных событий.

74. Барометр измеряет атмосферное давление. Рассмотрите следующие события:

$A =$ {давление от 750 до 760 мм рт. ст.},

$B =$ {давление не меньше 735 мм рт. ст.},

$C =$ {давление больше 740 мм рт. ст.},

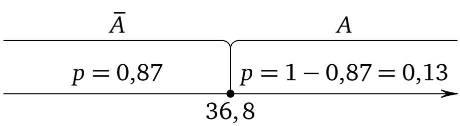
$D =$ {давление от 755 до 770 мм рт. ст.}.

а) Среди перечисленных событий укажите событие с наибольшей вероятностью.

б) Можно ли определённо сказать, какая из вероятностей больше: $\mathrm{P}(A)$ или $\mathrm{P}(D)$?

75. Вероятность того, что в случайный момент времени температура тела здорового человека окажется ниже чем 36,8 °C, равна 0,87. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени у здорового человека температура окажется 36,8 °C или выше.

Пример решения. Обозначим температуру буквой T. Пусть $A = \{T \geqslant 36{,}8\,^\circ\mathrm{C}\}$. На числовой прямой это событие изображается лучом, идущим вправо от точки 36,8.



Значит, событие $\bar{A} = \{T < 36{,}8\,^\circ\mathrm{C}\}$ изображается лучом, идущим влево от этой точки. Его вероятность известна, $\mathrm{P}(\bar{A}) = 0{,}87$. Тогда

$$\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\bar{A}) = 1 - 0{,}87 = 0{,}13.$$

76. Вероятность того, что в случайный момент времени атмосферное давление в некотором городе не выше 745 мм рт. ст., равна 0,53. Найдите вероятность того, что в случайный момент давление превышает 745 мм рт. ст.

77. При изготовлении подшипников диаметром 65 мм вероятность того, что диаметр будет отличаться от заданного более чем на 0,01 мм, равна 0,034. Найдите вероятность того, что случайный подшипник будет иметь диаметр в пределах от 64,99 до 65,01 мм.

Указание. Обозначим отклонение диаметра от 65 мм буквой X. Пусть $A=\{X>0{,}01 \text{ мм}\}$. Вероятность этого события дана в условии: $\mathrm{P}(A)=0{,}034$. Нужно найти вероятность противоположного события $\bar{A}=\{X\leqslant 0{,}01 \text{ мм}\}$. Задача аналогична задачам 75 и 76.

78. При изготовлении шоколадных батончиков номинальной массой 55 г вероятность того, что масса батончика будет в пределах от 54 до 56 г, равна 0,76. Найдите вероятность того, что масса батончика отличается от номинальной больше чем на 1 г.

79. Вероятность того, что на тестировании по физике студент П. верно решит не менее 11 задач, равна 0,61. Вероятность того, что П. верно решит не менее 10 задач, равна 0,69. Найдите вероятность того, что П. верно решит ровно 10 задач.

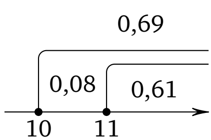
Пример решения. Обозначим число решённых задач через X. Даны вероятности событий: $\mathrm{P}(X\geqslant 11)=0{,}61$ и $\mathrm{P}(X>10)=0{,}69$. Нужно найти $\mathrm{P}(X=10)$. События $X\geqslant 11$ и $X=10$ *несовместны*, поэтому

$$\mathrm{P}(X=10)+\mathrm{P}(X\geqslant 11)=\mathrm{P}(X\geqslant 10).$$

Следовательно,

$$\mathrm{P}(X=10)=\mathrm{P}(X\geqslant 10)-\mathrm{P}(X\geqslant 11)=0{,}69-0{,}61=0{,}08.$$

Рисунок иллюстрирует решение.

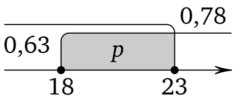


80. Вероятность того, что новый сканер прослужит больше года, равна 0,96. Вероятность того, что он прослужит два года или больше, равна 0,87. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

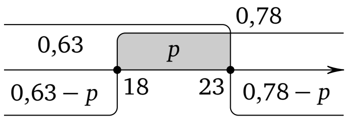
81. Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 25 пассажиров, равна 0,88, а вероятность того, что их окажется меньше 15, равна 0,64. Найдите вероятность того, что в понедельник число пассажиров окажется от 15 до 24.

82*. Термометр измеряет комнатную температуру. Вероятность того, что температура окажется не ниже 18 °C, равна 0,78. Вероятность того, что температура не выше 23 °C, равна 0,63. Найдите вероятность того, что температура окажется в пределах от 18 °C до 23 °C.

Пример решения. Обозначим температуру буквой T и изобразим промежутками на числовой прямой указанные события и их вероятности. Нужно найти вероятность события $\{18\,^\circ\mathrm{C} \leqslant T \leqslant 23\,^\circ\mathrm{C}\}$, которое изображается закрашенным промежутком. Пусть эта вероятность равна p.



Тогда вероятность события $\{T < 18\,^\circ\mathrm{C}\}$ равна $0{,}63 - p$, а вероятность события $\{T > 23\,^\circ\mathrm{C}\}$ равна $0{,}78 - p$ (см. рисунок).



Вместе три *несовместных* события $\{T < 18\,^\circ\mathrm{C}\}$, $\{18\,^\circ\mathrm{C} \leqslant T \leqslant 23\,^\circ\mathrm{C}\}$ и $\{T > 23\,^\circ\mathrm{C}\}$ покрывают всю числовую прямую, поэтому их суммарная вероятность равна 1:

$$(0{,}63 - p) + p + (0{,}78 - p) = 1.$$

решив уравнение, получаем $p = 0{,}63 + 0{,}78 - 1 = 0{,}41$.

Указание. Задачу можно решить без уравнения, последовательно вычисляя вероятности событий $\{T < 18\,^\circ\mathrm{C}\}$; $\{T > 23\,^\circ\mathrm{C}\}$ и $\{18\,^\circ\mathrm{C} \leqslant T \leqslant 23\,^\circ\mathrm{C}\}$.

83*. В роддоме измеряют вес новорождённого. Вероятность того, что вес окажется не меньше 3 кг, равна 0,87; вероятность того, что вес окажется не больше 3 кг 600 г, равна 0,93. Найдите вероятность того, что вес случайно выбранного новорождённого окажется в пределах от 3 кг до 3 кг 600 г.

84. По данным многолетних наблюдений установлено, что в городе N годовое количество осадков превысит 2000 мм с вероятностью 0,45, а вероятность того, что годовое количество осадков окажется меньше 1500 мм, равна 0,24. Найдите вероятность того, что количество осадков в городе N в следующем году окажется в промежутке от 1500 до 2000 мм.

Задания для домашней работы

85. Датчик измеряет уровень воды в водохранилище по отношению к ординару (нормальному уровню). Расположите события в порядке возрастания их вероятностей:

A = {уровень выше отметки «0,5 м выше ординара»},

B = {уровень выше отметки «1,3 м выше ординара»},

C = {уровень между отметками «1,4 м выше ординара» и «1,8 м выше ординара»},

D = {уровень воды не ниже ординара}.

86. Анемометр измеряет скорость ветра. Рассмотрите следующие события:

A = {скорость от 1 до 3 м/с},

B = {скорость от 5 до 7 м/с},

C = {скорость не превышает 15 м/с},

D = {скорость от 3 до 10 м/с}.

а) Среди перечисленных событий укажите событие с наибольшей вероятностью.

б) Если возможно, сравните вероятности событий A и B.

в) Если возможно, сравните вероятности событий B и D.

87. Вероятность того, что в городе K солнечных дней в году будет 300 или больше, равна 0,36. Найдите вероятность того, что в следующем году в этом городе солнечных дней будет меньше чем 300.

88. При изготовлении водопроводных труб диаметром 2 дюйма, т. е. 50,8 мм, вероятность отклонения диаметра в ту или иную сторону от заданного значения более чем на 0,1 мм равна 0,13. Найдите вероятность того, что диаметр случайно выбранной для контроля трубы будет в пределах от 50,7 мм до 50,9 мм.

89. Вероятность того, что в будний день число посетителей торгового центра превысит 2000 человек, равна 0,34. Вероятность того, что число посетителей превысит 2500 человек, равна 0,18. Найдите вероятность того, что в случайно выбранный будний день число посетителей окажется:

а) 2000 человек или меньше; б) от 2001 до 2500 человек.

90*. Гигрометр измеряет влажность в помещении картинной галереи. Вероятность того, что влажность окажется не ниже 40 %, равна 0,82. Вероятность того, что влажность окажется не выше 56 %, равна 0,74. Найдите вероятность того, что влажность находится в промежутке от 40 % до 56 %.

§ 4. Операции над событиями. Диаграммы Эйлера. Независимые события

Пояснение. С противоположными событиями мы встречались и в предшествующих параграфах. Координатная прямая, служившая основным инструментом в § 3, была удобна, когда события выражались через числовые величины. В общем случае, для событий произвольной природы, удобно использовать другое графическое представление — *диаграммы, или круги Эйлера*. Каждое событие изображается фигурой, например кругом внутри прямоугольника. Пересечение событий — пересечение фигур, объединение событий — объединение фигур. Площадь фигуры схематично изображает вероятность соответствующего события.

Весь прямоугольник соответствует событию с единичной вероятностью, т. е. прямоугольник — это все исходы эксперимента.

Обратим внимание на способ задания вероятностей во многих задачах этого параграфа. Прежде вероятность задавалась отношением числа благоприятствующих элементарных исходов к общему числу исходов эксперимента. *Если в эксперименте бесконечно много элементарных исходов или большое, но неопределённое количество, то часто вероятность определяют через долю или через среднюю долю благоприятствующих исходов*. Например, «30 % жителей города пользуются интернет-магазинами». Или «на каждую сотню горожан в среднем 30 человек пользуются интернет-магазинами». И в том и в другом случае выражена одна и та же мысль: вероятность события «случайно выбранный житель города пользуется интернет-магазинами» равна 0,3.

В этом параграфе появляются задачи, где используется *независимость событий* и сам этот термин. Независимость событий A и B означает, что вероятность их одновременного наступления в эксперименте равна произведению их вероятностей:

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B).$$

Если независимости событий нет, то вероятность одновременного их наступления найти сложнее, возможно, потребуются дополнительные сведения. Сравните, например, задачи 104 и 116 или 108 и 121.

Другая полезная формула — формула сложения вероятностей:

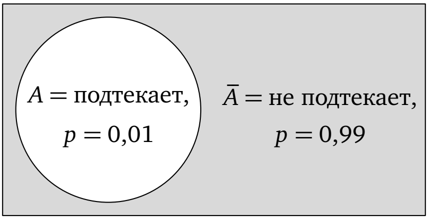
$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B).$$

Она может использоваться в решении многих задач этого параграфа. Мы же покажем, как диаграммы Эйлера позволяют решать задачи наглядно, даже почти не пользуясь формулами.

Задачи для работы в классе

91. В среднем из каждых 900 садовых насосов, поступивших в продажу, 9 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

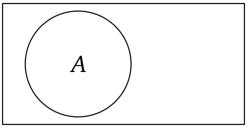
Пример решения. Здесь вероятность задана средней долей. Вероятность события $A = \{\text{насос подтекает}\}$ равна $\mathrm{P}(A) = \frac{9}{900} = 0{,}01$. Следовательно, вероятность противоположного события $\bar{A}$ равна $\mathrm{P}(\bar{A}) = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$. Проиллюстрировать решение можно с помощью диаграммы.



92. Фабрика выпускает сумки. В среднем из 120 сумок, поступивших в продажу, 4 сумки имеют какой-либо скрытый дефект. Найдите вероятность того, что случайно выбранная сумка окажется без дефектов.

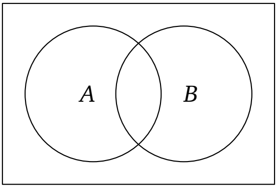
93. Фабрика выпускает сумки. В магазине в среднем на 120 качественных сумок приходится 5 сумок, имеющих скрытый дефект. Найдите вероятность того, что случайно выбранная в магазине сумка окажется без дефектов[1].

94. Дана диаграмма Эйлера с событием A. Заштрихуйте на диаграмме Эйлера событие $\bar{A}$.

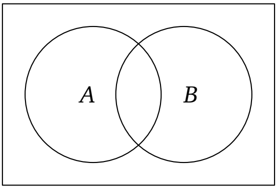


[1] Обратите внимание на отличие в формулировках этой задачи и предыдущей. Здесь имеется противопоставление «качественные сумки — бракованные сумки». В предыдущей задаче бракованные сумки входили в число рассматриваемых 120 сумок.

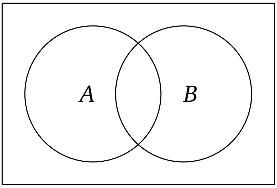
95. Дана диаграмма Эйлера для событий A и B. Заштрихуйте событие $A \cap B$.



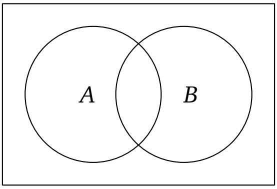
96. Дана диаграмма Эйлера для событий A и B. Заштрихуйте событие $A \cup B$.



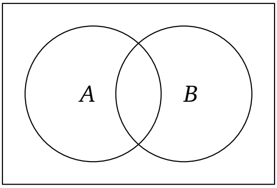
97. Дана диаграмма Эйлера для событий A и B. Заштрихуйте событие $\overline{A} \cap B$, которое состоит в том, что событие B наступило, а событие A не наступило.



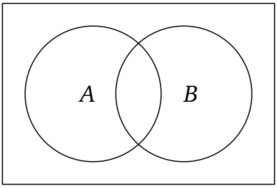
98. Дана диаграмма Эйлера для событий A и B. Заштрихуйте событие $\overline{A} \cap \overline{B}$, которое состоит в том, что не наступило ни одно из событий A и B.



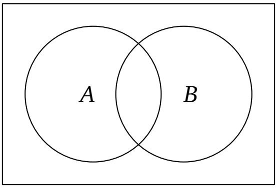
99. Дана диаграмма Эйлера для событий A и B. Заштрихуйте событие $A \cup \overline{B}$, которое состоит в том, что наступило событие A или не наступило событие B.



100. Дана диаграмма Эйлера для событий A и B.
а) Сформулируйте словами событие $\overline{A} \cup B$.
б) Заштрихуйте это событие на диаграмме Эйлера.



101. Дана диаграмма Эйлера для событий A и B.
а) Сформулируйте словами событие $\overline{A} \cup \overline{B}$.
б) Заштрихуйте это событие на диаграмме Эйлера.

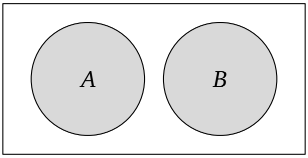


102. На экзамене по геометрии школьник отвечает на один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос по теме «Вписанная окружность», равна 0,3. Вероятность того, что это вопрос по теме «Тригонометрия», равна 0,1. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

Пример решения. Известно, что события $A = \{$вопрос по теме «Вписанная окружность»$\}$ и $B = \{$вопрос по теме «Тригонометрия»$\}$ не наступают вместе, т. е. они *несовместны*. Поэтому вероятность объединения этих событий равна сумме их вероятностей:

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) = 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}4.$$

Диаграмма Эйлера для этих событий выглядит следующим образом:



103. В классе 35 человек, среди них у шестерых в году пятёрки по теории вероятностей, а у восьмерых в году пятёрки по физике. При этом нет никого, у кого были бы пятёрки по этим двум предметам. Найдите вероятность того, что случайно выбранный ученик класса имеет пятёрку по одному из этих двух предметов.

104. Даны два события A и B, и известны некоторые вероятности: $\mathrm{P}(A) = 0{,}4$, $\mathrm{P}(B) = 0{,}2$ и $\mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}1$. Во всех четырёх фигурах на диаграмме Эйлера расставьте вероятности соответствующих событий.

Пример решения. Найдём вероятность «левой лунки», т. е. события $A \cap \overline{B}$:

$$\mathrm{P}(A \cap \overline{B}) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}4 - 0{,}1 = 0{,}3.$$

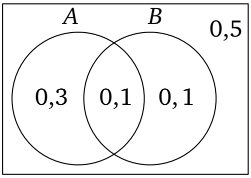
Так же находим, что вероятность «правой лунки» равна

$$\mathrm{P}(\overline{A} \cap B) = 0{,}2 - 0{,}1 = 0{,}1.$$

На долю события $\overline{A} \cap \overline{B}$ («внешней части») остаётся

$$1 - 0{,}1 - 0{,}3 - 0{,}1 = 0{,}5.$$

Можно рассуждать другими способами.



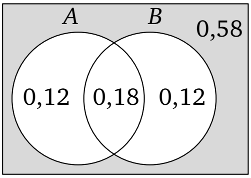
105. Даны два события A и B, и известны некоторые вероятности: $\mathrm{P}(A) = 0{,}3$, $\mathrm{P}(B) = 0{,}5$ и $\mathrm{P}(A \cup B) = 0{,}7$. Во всех четырёх фигурах на диаграмме Эйлера расставьте вероятности соответствующих событий.

106. Даны два события A и B, и известны некоторые вероятности: $\mathrm{P}(A) = 0{,}2$, $\mathrm{P}(\overline{B}) = 0{,}7$ и $\mathrm{P}(A \cup B) = 0{,}45$. Во всех четырёх фигурах на диаграмме Эйлера расставьте вероятности соответствующих событий.

107. Даны два события A и B, и известны некоторые вероятности: $\mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}2$, $\mathrm{P}(B) = 0{,}6$ и $\mathrm{P}(A \cup B) = 0{,}9$. Во всех четырёх фигурах на диаграмме Эйлера расставьте вероятности соответствующих событий.

108. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в каждом одном автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,18. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Пример решения. Введём обозначения событий: $A = \{$кофе кончился в первом автомате$\}$, $B = \{$кофе кончился во втором автомате$\}$. Требуется найти вероятность события $\overline{A \cup B}$. На диаграмме Эйлера этому событию соответствует «внешняя часть». Расставим на диаграмме вероятности.



109. В небольшом магазине работают два продавца — Василий и Сергей. Каждый из них может быть занят с клиентом с вероятностью 0,4. При этом они могут быть заняты одновременно с вероятностью 0,3. Найдите вероятность того, что:

а) занят только Василий, а Сергей свободен;

б) занят только один из них, а другой свободен;

в) оба свободны.

110. Даны два независимых события A и B, и известны их вероятности: $\mathrm{P}(A) = 0{,}6$ и $\mathrm{P}(B) = 0{,}4$. Найдите вероятность пересечения этих событий.

Пример решения. События по условию независимы. Следовательно,

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B) = 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}24.$$

111. В некотором случайном эксперименте события A и B независимы. Найдите вероятность их пересечения, если:

а) $\mathrm{P}(A)=0{,}3$, $\mathrm{P}(B)=0{,}8$;

б) $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$;

в) $\mathrm{P}(A)=\frac{m}{n}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{k}{n}$.

112. Игральную кость бросают дважды. Найдите вероятность события «при первом броске выпало меньше трёх очков, а при втором выпало больше двух очков».

Пример решения. Вероятность этого события можно найти в таблице эксперимента. Можно рассуждать иначе. Пусть $A=\{$в первый раз меньше трёх очков$\}$, а $B=\{$во второй раз больше двух очков$\}$. Тогда

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(\{1,2\})=\frac{2}{6}=\frac{1}{3} \quad \text{и} \quad \mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(\{3,4,5,6\})=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

Требуется найти пересечение этих событий, т. е. $\mathrm{P}(A\cap B)$. Поскольку события A и B относятся к разным броскам, они независимы. Поэтому

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}.$$

113. Игральную кость бросают дважды. Найдите вероятность события «при первом броске выпало пять очков, а при втором выпало от двух до четырёх очков».

114. В некотором случайном эксперименте два события A и B имеют ненулевые вероятности и *несовместны*. Докажите, что такие события не являются независимыми.

Пример доказательства. Предположим, что эти события независимы. Тогда должно выполняться равенство

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B).$$

Левая часть равенства равна нулю, поскольку события несовместны, а значит, их пересечение – пустое событие: $\mathrm{P}(A\cap B)=0$. Правая часть равенства больше нуля, поскольку по условию оба события A и B имеют ненулевые вероятности. Равенство неверно, следовательно, предположение неверно. События не являются независимыми. □

115. Игральную кость бросают дважды. Докажите, что события «при первом броске выпало два очка» и «сумма выпавших очков равна 9»:

а) являются несовместными;

б) не являются независимыми.

Указание. Несовместность можно увидеть в таблице эксперимента, а можно задать себе вопрос, сколько должно было выпасть очков при втором бросании. При доказательстве в пункте (б) можно рассуждать так же, как в задаче 114.

116. Даны два независимых события A и B, и известны их вероятности: $\mathrm{P}(A) = 0{,}4$ и $\mathrm{P}(B) = 0{,}2$. Во всех четырёх фигурах на диаграмме Эйлера расставьте вероятности соответствующих событий.

Указание. События по условию независимы. Следовательно,

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B) = 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}08.$$

Дальше задача решается так же, как задача 104.

117. Даны два независимых события A и B, и известны вероятности $\mathrm{P}(A) = 0{,}3$ и $\mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}15$. Во всех четырёх фигурах на диаграмме Эйлера расставьте вероятности соответствующих событий.

118. Симметричную монету бросают три раза. Рассмотрите события «в первый раз выпал орёл» и «решка выпала только один раз».

а) Являются ли эти события независимыми?

б) Найдите вероятность объединения этих событий.

Пример решения. Событие $A = \{$в первый раз выпал орёл$\}$ и событие $B = \{$решка выпала только один раз$\}$ запишем перечислением элементарных исходов:

$$A = \{\text{ООО}, \text{ООР}, \text{ОРО}, \text{ОРР}\} \quad \text{и} \quad B = \{\text{ООР}, \text{ОРО}, \text{РОО}\}.$$

Их пересечение $A \cap B = \{\text{ООР}, \text{ОРО}\}$ состоит из двух исходов. Получаем вероятности:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{1}{2}, \quad \mathrm{P}(B) = \frac{3}{8} \quad \text{и} \quad \mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}.$$

Равенство $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$ не выполняется. Следовательно, события A и B не являются независимыми. Объединение событий имеет вид

$$A \cup B = \{\text{ООО}, \text{ООР}, \text{ОРО}, \text{ОРР}, \text{РОО}\}.$$

Вероятность равна $\frac{5}{8}$. Кроме того, можно воспользоваться формулой сложения:

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8}.$$

119. Симметричную монету бросают три раза. Рассмотрите события «орлы и решки чередуются» и «в первый раз выпал орёл».

а) Являются ли эти события независимыми?

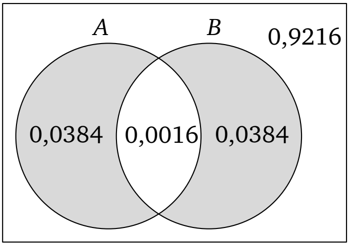
б) Найдите вероятность объединения этих событий.

120. В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,04 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что ровно один автомат из двух оказался неисправен, а другой работает.

Пример решения. Введём обозначения событий: $A = \{\text{первый неисправен}\}$, $B = \{\text{второй неисправен}\}$. По условию события независимы, поэтому

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B) = 0{,}04 \cdot 0{,}04 = 0{,}0016.$$

Запишем вероятности в диаграмме Эйлера.



Событию «ровно один из двух неисправен» на диаграмме Эйлера соответствуют «левая лунка» и «правая лунка» — это событие закрашено на рисунке. Его вероятность равна $2 \cdot 0{,}0384 = 0{,}0768$.

121. В магазине стоят два банкомата, работающих независимо друг от друга. Каждый из них может оказаться неисправным с вероятностью 0,08 независимо от другого. Найдите вероятность того, что хотя бы один из банкоматов исправен.

Указание. Задача может быть решена так же, как предыдущая. Но можно проще. Из-за независимости вероятность того, что сразу оба банкомата неисправны, равна

$$0{,}08 \cdot 0{,}08 = 0{,}0064.$$

Следовательно, вероятность того, что хотя бы один банкомат исправен, равна[1]

$$1 - 0{,}0064 = 0{,}9936.$$

[1] Эту задачу полезно сопроводить беседой с учащимися на тему, зачем ставить два банкомата рядом, даже когда посетителей не очень много. Благодаря независимости вероятность того, что будут неисправны оба, ничтожно мала. А если банкомат один, то вероятность 0,08 того, что клиент не будет обслужен, слишком велика, чтобы с нею мириться.

122. Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,3. Найдите вероятность того, что в течение года:

а) хотя бы одна лампа не перегорит;

б) ровно одна лампа не перегорит;

в) ни одна из ламп не перегорит.

123. По отзывам покупателей Пётр Петрович оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,9. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,8. Пётр Петрович заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что:

а) оба магазина доставят товар;

б) ни один магазин не доставит товар.

124. Вероятность того, что одна любая новая батарейка бракованная, равна 0,05 (независимо от других батареек). Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две такие батарейки. Найдите вероятность того, что:

а) обе батарейки окажутся исправными;

б) хотя бы одна батарейка окажется исправной.

Указание. Удобно рассмотреть события: $A = \{$первая батарейка исправна$\}$ и $B = \{$вторая исправна$\}$. Вероятность каждого из этих событий равна 0,95, и они независимы. Теперь легко найти вероятности нужных событий.

125. Если гроссмейстер А. играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера Б. с вероятностью 0,5. Если А. играет чёрными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,3. Гроссмейстеры А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

Указание. Введём обозначения событий: $M = \{$А. выиграл, играя белыми$\}$ и $N = \{$А. выиграл, играя чёрными$\}$. События M и N независимы. Требуется найти вероятность события $M \cap N$, причём порядок партий не играет роли.

126. Если гроссмейстер А. играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера Б. с вероятностью 0,6. Если А. играет чёрными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,4. Гроссмейстеры А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что:

а) А. выиграет оба раза;

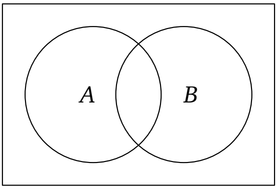
б) А. выиграет только одну партию из двух;

в) А. не выиграет ни разу.

Задания для домашней работы

127. Фабрика выпускает обувь. В среднем из 150 пар, поступивших в продажу, 3 пары имеют какой-либо незаметный дефект. Найдите вероятность того, что случайно выбранная сумка окажется без дефектов.

128. Заштрихуйте на диаграмме Эйлера событие $A \cap \overline{B}$.



129. Даны два события A и B, и известны некоторые вероятности: $P(A) = 0{,}2$, $P(B) = 0{,}7$ и $P(A \cap \overline{B}) = 0{,}1$. Во всех четырёх фигурах на диаграмме Эйлера расставьте вероятности соответствующих событий.

130. Даны два события A и B, и известны некоторые вероятности: $P(A) = 0{,}2$, $P(\overline{B}) = 0{,}7$ и $P(A \cup B) = 0{,}45$.

а) Во всех четырёх фигурах на диаграмме Эйлера расставьте вероятности соответствующих событий.

б) Найдите вероятность события, которое состоит в том, что событие A наступило, а событие B не наступило.

131. В некотором случайном эксперименте события A и B независимы. Найдите вероятность их пересечения, если:

а) $P(A) = 0{,}8$, $P(B) = 0{,}25$;

б) $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{2}{9}$.

132. Игральную кость бросают дважды. Найдите вероятность события «при первом броске выпало от трёх до пяти очков, а при втором выпало меньше пяти очков».

133. В торговом центре два одинаковых автомата продают шоколадные батончики. Вероятность того, что к концу дня в каждом одном из автоматов батончики закончатся, равна 0,2. Вероятность того, что батончики закончатся в обоих автоматах, равна 0,07. Найдите вероятность того, что к концу дня:

а) батончики закончатся только в первом автомате;

б) батончики закончатся только в одном автомате, а в другом останутся;

в) батончики останутся в обоих автоматах.

134. Симметричную монету бросают три раза. Рассмотрите события «случилось две решки подряд» и «решка выпала дважды».

а) Запишите эти события и их пересечение перечислением элементарных исходов.

б) Найдите вероятности этих событий и их пересечения.

в) Являются ли эти события независимыми?

г) Найдите вероятность объединения этих событий.

135. Даны два независимых события A и B, и известны их вероятности: $\mathrm{P}(A) = 0{,}6$ и $\mathrm{P}(B) = 0{,}7$.

а) Во всех четырёх фигурах на диаграмме Эйлера расставьте вероятности.

б) Найдите вероятность события $\bar{A} \cup \bar{B}$.

136. В магазине стоят два платёжных терминала. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,1 независимо от другого. Найдите вероятность того, что ровно один терминал из двух оказался неисправен, а другой работает.

137. Вероятность того, что одна любая новая батарейка бракованная, равна 0,06 (независимо от других батареек). Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две такие батарейки. Найдите вероятность того, что:

а) обе батарейки окажутся исправными;

б) хотя бы одна батарейка окажется исправной.

138. Если гроссмейстер А. играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера Б. с вероятностью 0,7. Если А. играет чёрными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,5. Гроссмейстеры А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что:

а) А. выиграет оба раза;

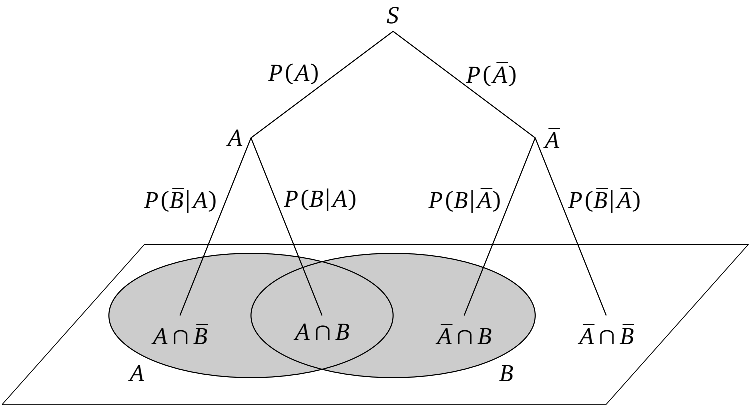
б) А. выиграет только одну партию из двух;

в) А. выиграет хотя бы одну из партий.

§ 5. Дерево случайного эксперимента

Пояснение. *Дерево эксперимента*, или *дерево вероятностей*, является удобным и универсальным инструментом решения вероятностных задач. Мы увидим, что практически все задачи, которые решались в предыдущем параграфе с помощью диаграмм Эйлера, можно решить с помощью дерева или наоборот. В одних случаях удобнее диаграмма, в других — дерево.

Проиллюстрируем сказанное рисунком, где видно, как четырём областям на диаграмме Эйлера соответствуют четыре цепочки в простом дереве, также построенном для двух событий A и B.



Дерево позволяет рассматривать составной эксперимент как бы «по частям». Иногда удобно мысленно расположить случайные события во времени, хотя нужно помнить, что эта очерёдность только мысленная. Событие A можно рассматривать при условии, что событие B произошло. Точно так же можно считать, что случилось A, и тогда ставить вопрос о вероятности события B. Эти *условные вероятности* удобно надписывать около соответствующих рёбер дерева. Это наглядно, и этому легко научиться. Даже при небольшом навыке деревья становятся излюбленным способом решения многих задач.

Удобно принять некоторые правила. Построение дерева начинаем с точки S (от слова «Start»), впрочем, можно применить любую другую букву. Элементарные события опыта представлены цепочками, идущими от S вниз к какой-нибудь конечной вершине. Промежуточные и конечные вершины будем обозначать так же, как события, или другими подходящими буквами (иногда совпадающими), в зависимости от того, как удобнее в конкретной задаче.

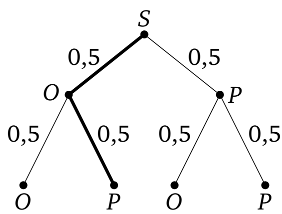
Важно! *Сумма вероятностей на всех рёбрах, выходящих из общей вершины дерева всегда равна единице*, хотя некоторые рёбра могут не изображаться за ненадобностью. Об этом нужно напоминать учащимся.

Задачи для работы в классе

139. Симметричную монету бросают дважды.

а) Изобразите дерево этого эксперимента и надпишите вероятности около рёбер.

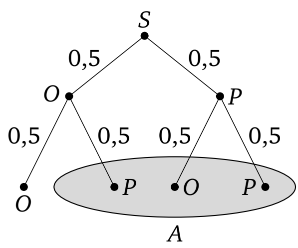
б) Обведите жирно цепочку, соответствующую элементарному событию ОР.



Пример решения. а) От точки S проведём два ребра к точкам O (первый раз выпал орёл) и P (первый раз выпала решка). Вероятности каждого из этих событий 0,5. Если выпал орёл, то второй раз могут снова выпасть орёл или решка с вероятностями 0,5. Строим ещё два ребра к вершинам O и P. Аналогично поступаем в случае, когда первый раз выпала решка. Надписываем все вероятности около рёбер. Получается дерево.

б) Обводим цепочку SOP.

140. Симметричную монету бросают дважды. Постройте дерево эксперимента и укажите на нём событие $A = \{$выпала хотя бы одна решка$\}$.



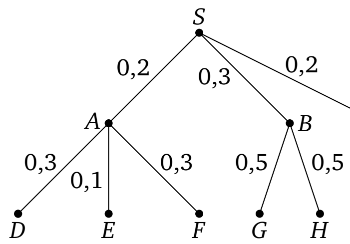
Указание. Дерево построено в задаче 139. Событие «хотя бы одна решка» состоит из элементарных исходов ОР, РО и РР. В дереве эти исходы изображены цепочками SOP, SPO и SPP. Вместо того чтобы обводить три нужные цепочки, удобно нарисовать какую-нибудь фигуру, содержащую их конечные вершины (см. рисунок).

141. Симметричную монету бросают дважды. Постройте дерево эксперимента и укажите на нём событие:

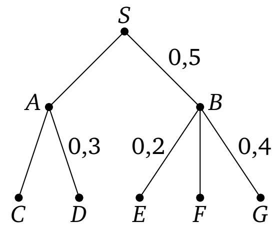
а) $A = \{$орлов либо нет вовсе, либо два$\}$;

б) $B = \{$первый раз выпала решка$\}$.

142. На рисунке изображено дерево некоторого случайного эксперимента. Какие допущены ошибки?



143. На рисунке изображено дерево некоторого случайного эксперимента.



а) Перерисуйте дерево в тетрадь и надпишите недостающие вероятности на рёбрах.

б) Сколько элементарных событий в этом эксперименте?

в) Пользуясь *правилом умножения вероятностей*, вычислите вероятности цепочек SAC и SBE.

г) Найдите вероятность события F.

Пример решения. Суммы вероятностей рёбер, исходящих из одной вершины, должны равняться единице. Исходя из этого получаем

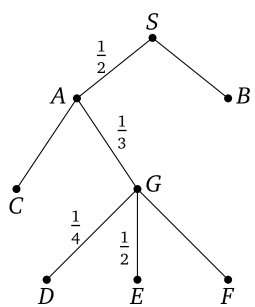
$$\mathrm{P}(SA) = 0{,}5, \quad \mathrm{P}(AC) = 0{,}7 \quad \text{и} \quad \mathrm{P}(BF) = 0{,}4.$$

Всего от вершины S идут пять цепочек к конечным рёбрам, поэтому в эксперименте пять элементарных событий. Вероятности найдём, пользуясь правилом умножения:

$$\mathrm{P}(SAC) = 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}35 \quad \text{и} \quad \mathrm{P}(SBE) = 0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}1.$$

Событию F благоприятствует цепочка SBF. Её вероятность равна $0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}2$.

144. На рисунке изображено дерево некоторого случайного эксперимента с началом в точке S.



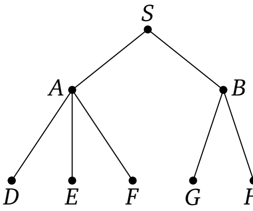
а) Изобразите дерево в своей тетради и напишите недостающие вероятности на рёбрах.

б) Вычислите вероятность цепочек SAC и $SAGF$.

145. Дано дерево некоторого случайного эксперимента. Известно, что все рёбра, исходящие из одной вершины, равновероятны.

а) Подпишите вероятности на рёбрах дерева.

б) Сколько элементарных событий в этом эксперименте?



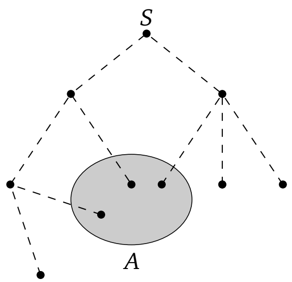
в) Найдите вероятности элементарных событий SAE и SBH.

Указание. По условию вероятности на рёбрах, исходящих из одной вершины, равны. Поэтому $\mathrm{P}(SA) = P(SB) = \frac{1}{2}$. Аналогично

$$\mathrm{P}(AD) = \mathrm{P}(AE) = \mathrm{P}(AF) = \frac{1}{3}.$$

Так же находим вероятности рёбер BG и BH. Вероятности находим с помощью правила умножения вероятностей.

146. На рисунке изображено дерево некоторого случайного эксперимента и закрашенной областью показано событие A. Рёбра обозначены пунктиром. Известно, что рёбра, исходящие из одной вершины, равновероятны.

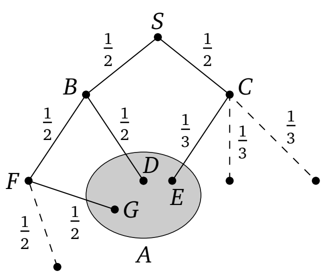


а) Надпишите около рёбер соответствующие вероятности.

б) Обведите сплошной линией цепочки, благоприятствующие событию A.

в) Найдите вероятность события A.

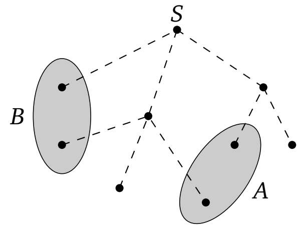
Пример решения. Пользуясь равновероятностью рёбер, надпишем вероятности и обведём цепочки, ведущие к событию A. Вершины на этих цепочках обозначим буквами (не нужные в задаче вершины можно не обозначать).



Событию A благоприятствуют элементарные события SBD, $SBFG$ и SCE. Найдём их вероятности, умножая вероятности вдоль соответствующих цепочек: $\mathrm{P}(SBD)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(SBFG)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$ и $P(SCE)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$. Тогда

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(SBD)+\mathrm{P}(SBFG)+\mathrm{P}(SCE)=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{6}=\frac{13}{24}.$$

147. На рисунке изображено дерево некоторого случайного эксперимента и показаны события A и B. Рёбра обозначены пунктиром. Известно, что рёбра, исходящие из одной вершины, равновероятны.

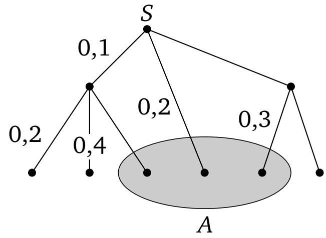


а) Обведите сплошной линией цепочки, благоприятствующие событию A. Другим цветом обведите цепочки, благоприятствующие событию B.

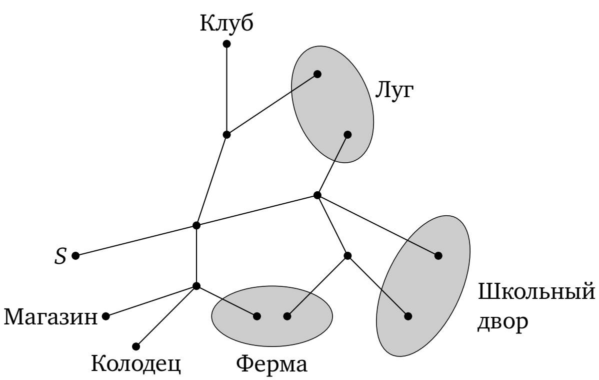
б) Найдите вероятность события A.

в) Найдите вероятность события B.

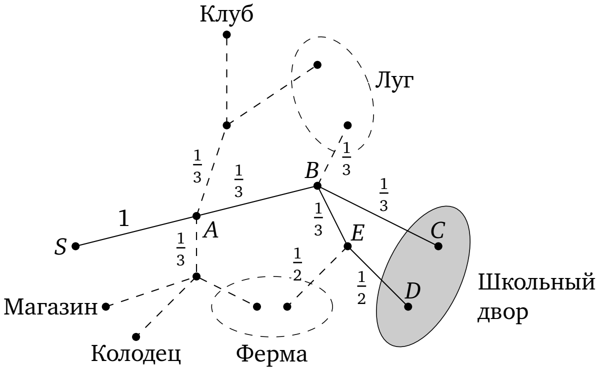
148. На рисунке изображено дерево некоторого случайного эксперимента. Найдите вероятность события A.



149. Сергей Петрович гуляет по своему посёлку. Схема дорожек показана на рисунке. Он начинает прогулку в точке S и на каждой развилке с равными шансами выбирает любую из дорожек (но не возвращается). Найдите вероятность того, что Сергей Петрович в конце концов придёт на школьный двор.



Пример решения. Схема дорожек уже представляет собой дерево случайного эксперимента «прогулка Сергея Петровича». По условию все рёбра, исходящие из одной вершины, равновероятны. Пользуясь этим, надпишем вероятности и расставим обозначения вершин вдоль цепочек, ведущих на школьный двор. Получаем цепочки[1] $SABC$ и $SABED$. Остальные цепочки нам в этой задаче не нужны — для наглядности их можно изобразить пунктиром или бледно. При навыке лишние цепочки можно не изображать.



Найдём вероятность события $M=\{$С. П. попал на школьный двор$\}$:

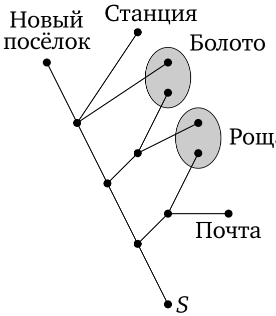
$$\mathrm{P}(M) = \mathrm{P}(SABC) + \mathrm{P}(SABED) = 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

150. Алексей выходит из точки S и движется по дорожкам, которые показаны на рисунке. На каждой развилке Алексей равновероятно выбирает дальнейший путь, но не возвращается обратно. Найдите вероятность того, что таким образом он попадёт:

а) в Новый посёлок;

б) в болото;

в) на почту или на станцию.



151. Галина гуляет по парку. Она выходит из точки S и, дойдя до очередной развилки, с равными шансами выбирает следующую

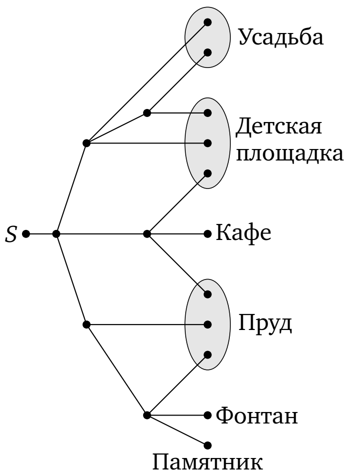
[1] Обратите внимание: на дереве есть переход SA с единичной вероятностью. При вычислениях мы послушно пишем множитель 1, хотя этого можно и не делать. Разумеется, можно было считать, что Сергей Петрович начинает своё путешествие в точке A, поскольку в неё он обязательно попадёт.

дорожку, но не возвращается обратно. Найдите вероятность того, что таким образом она окажется:

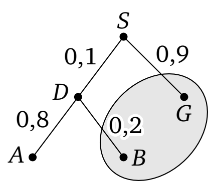
а) у памятника;

б) на детской площадке;

в) около пруда или около фонтана.



152. На фабрике керамической посуды 10 % произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 80 % дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что произведённая тарелка попадёт в продажу.



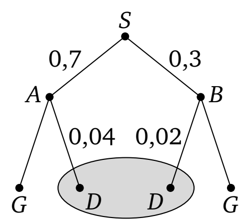
Пример решения. Дефект будем обозначать буквой D, хорошую тарелку — буквой G. Если дефект обнаружили при контроле качества, такое событие назовём A, если же дефектную тарелку пропустили в продажу, обозначим такое событие B. Получаем дерево.

Событию «тарелка попала в продажу» (закрашено на рисунке) благоприятствуют цепочки SG и SDB. Вероятность этого события равна $\mathrm{P}(SG)+\mathrm{P}(SDB)=0{,}9+0{,}1\cdot 0{,}2=0{,}92$.

Указание. Задачу можно было решить переходом к противоположному событию. Достаточно найти вероятность события $A=\{$тарелка забракована$\}$: $\mathrm{P}(SDA)=0{,}1\cdot 0{,}8=0{,}08$ и вычесть её из единицы.

153. На заводе делают электрические лампочки, 5 % всех изготовленных лампочек неисправны. Система контроля качества выявляет все неисправные лампочки, но по ошибке бракует ещё 1 % исправных лампочек. Все забракованные лампочки отправляются в переработку, а остальные в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная лампочка отправится в переработку.

154. Две фабрики выпускают одинаковые стёкла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 70 % этих стёкол, вторая — 30 %. На первой фабрике 4 % стёкол имеют брак, а вторая выпускает 2 % бракованной продукции. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.



Пример решения. Изобразим дерево вероятностей. Событие «стекло выпущено на первой фабрике» обозначим A, и пусть B означает событие «стекло изготовлено на второй фабрике». Событие «стекло бракованное» обозначим D (от слова «defect») и так же подпишем соответствующие вершины, а если стекло хорошее, будем писать около вершины G («good»), а можно вообще ничего не писать за ненадобностью.

Событию $D = \{$стекло бракованное$\}$ благоприятствуют цепочки SAD и SBD. Поэтому

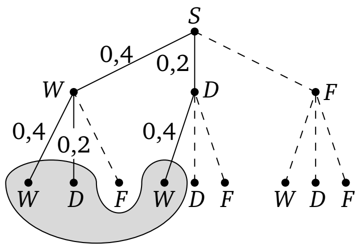
$$\mathrm{P}(D) = \mathrm{P}(SAD) + \mathrm{P}(SBD) = \\ = 0{,}7 \cdot 0{,}04 + 0{,}3 \cdot 0{,}02 = 0{,}028 + 0{,}006 = 0{,}034.$$

155. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,05. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Эта система бракует 99 % неисправных батареек и по ошибке бракует 3 % исправных батареек. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

156. Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,9, если стреляет из знакомого револьвера. Если Джон стреляет из незнакомого револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,4. На столе лежит 10 револьверов, из них только 4 знакомы Джону. Внезапно Джон видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнётся.

157. Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей — 1 очко, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,4.

Пример решения. Ясно, что команде нужно либо две победы, либо победа и ничья. Поэтому можно строить не всё дерево, а только его часть. Лишнюю часть мы все же изобразим, но бледно. Выигрыш обозначим W, поражение F, а ничью D. Вероятность ничьей равна 0,2.



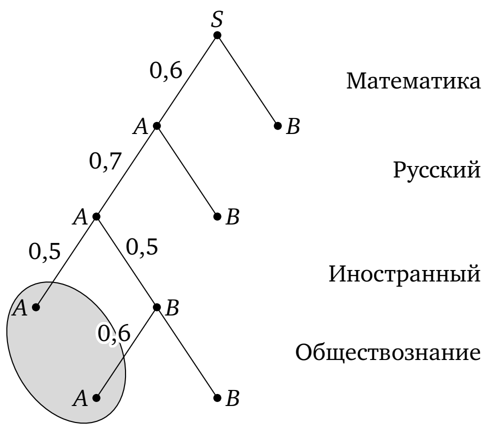
Событию $A=\{$хотя бы четыре очка$\}$ благоприятствуют цепочки SWW, SWD и SDW. Поэтому

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(SWW)+\mathrm{P}(SWD)+\mathrm{P}(SDW) =$$
$$= 0{,}4\cdot 0{,}4+0{,}4\cdot 0{,}2+0{,}2\cdot 0{,}4 = 0{,}32.$$

158. Чтобы поступить на специальность «Международные отношения», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 68 баллов по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы поступить на специальность «Таможенное дело», нужно набрать не менее 68 баллов по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и обществознание. Вероятность того, что абитуриент Р. получит не менее 68 баллов по математике, равна 0,6, по русскому языку — 0,7, по иностранному языку — 0,5 и по обществознанию — 0,6. Найдите вероятность того, что Р. сможет поступить на одну из двух упомянутых специальностей.

Пример решения. Не важно, в каком порядке идут экзамены. Будем считать, что сначала математика, затем русский язык, затем иностранный язык, а затем обществознание. Успешный экзамен (68 баллов или больше) будем обозначать буквой A, а неудачу на очередном экзамене буквой B.

Чтобы не запутаться, подпишем на рисунке, когда что абитуриент сдаёт. И учтём, что если математику или русский абитуриент сдал плохо, то дальнейшие экзамены уже не играют роли. А если успешно сданы первые три экзамена, то результат обществознания не важен — абитуриент проходит на специальность «Международные отношения». Поэтому соответствующие цепочки не нужны. Получается следующее дерево.

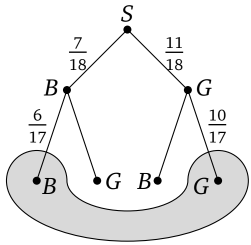


Событие $M=${абитуриент прошёл хотя бы на одну из специальностей} показано на рисунке закрашенной областью. Его вероятность равна

$$P(M)=P(SAAA)+P(SAABA)=$$
$$=0{,}6\cdot 0{,}7\cdot 0{,}5+0{,}6\cdot 0{,}7\cdot 0{,}5\cdot 0{,}6=0{,}336.$$

159. В группе 18 человек, из них 7 мальчиков, остальные девочки. По сигналу учителя физкультуры они быстро построились в одну шеренгу в случайном порядке. Найдите вероятность того, что на концах шеренги будут стоять две девочки или два мальчика.

Пример решения. Будем строить дерево. Сначала рассмотрим варианты для левого конца (фланга) шеренги, а затем — для правого. Мальчика обозначим B, а девочку — G. При назначении вероятностей придётся учитывать, что вероятности меняются в ходе эксперимента. Например, если девочка уже стоит слева, то для правого фланга количество возможностей для выбора девочек уменьшилось: их было 11 из 18, а осталось 10 из 17.



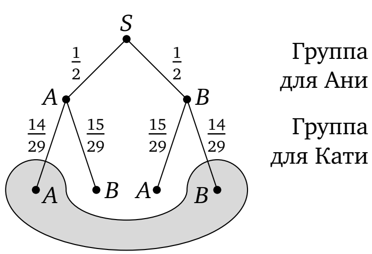
Дерево получилось несложное; событие $A = \{$на флангах два мальчика или две девочки$\}$ закрашено для наглядности. Ему благоприятствуют цепочки SBB и SGG. Тогда

$$P(A) = P(SBB) + P(SGG) = \frac{7 \cdot 6}{18 \cdot 17} + \frac{11 \cdot 10}{18 \cdot 17} = \frac{76}{153}.$$

160. В группе 19 человек, из них 10 мальчиков, остальные девочки. Из группы по жребию выбирают двоих. Найдите вероятность того, что эти двое окажутся разного пола.

161. В классе 30 человек, среди них две подруги — Аня и Катя. Учащихся случайным образом разбивают на две равные группы. Найдите вероятность того, что Аня и Катя окажутся в одной и той же группе.

Пример решения. Такую задачу в § 3 мы считали трудной, поскольку нужно было специальным образом определить множество элементарных исходов. С помощью дерева решение не представляет труда. Сначала посмотрим, в какую группу попадёт Аня, а потом — в какую Катя. Событие $A = \{$попала в первую группу$\}$, событие $B = \{$попала во вторую$\}$.



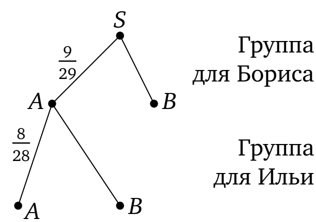
Событию $C=\{$обе попали в одну группу$\}$ соответствуют цепочки SAA и SBB. Вычислим вероятность:

$$P(C)=P(SAA)+P(SBB)=\frac{1}{2}\cdot\frac{14}{29}+\frac{1}{2}\cdot\frac{14}{29}=\frac{14}{29}.$$

162. В классе 26 человек, среди них два друга — Сергей и Павел. Учащихся случайным образом разбивают на две равные группы. Найдите вероятность того, что Сергей и Павел окажутся в разных группах.

163. В классе 30 человек, и класс случайным образом разделили на три группы по 10 человек. Найдите вероятность того, что три друга — Сергей, Борис и Илья — окажутся в одной группе.

Пример решения. Мы знаем, как решать такую задачу с двумя друзьями (см. задачи 58 и 161). Третий друг добавляет сложностей. Но можно совместить два подхода. Будем считать, что Сергей уже попал в какую-то группу. Осталось найти вероятность того, что в эту же группу попадёт Борис, а затем Илья. Борис попадает в группу к Сергею с вероятностью $\frac{9}{29}$. Так же рассуждаем, когда определяем вероятность Ильи попасть в ту же группу. Вершины, где очередной друг попал в группу к Сергею, назовём A, а вершины, где он попал в другую группу, обозначим B.



Искомая вероятность равна $P(SAA)=\frac{9}{29}\cdot\frac{8}{28}=\frac{18}{203}$.

164. В классе 30 человек, и класс случайным образом разделили на три группы по 10 человек. Найдите вероятность того, что из трёх друзей (Сергея, Бориса и Ильи):

а) никакие двое не окажутся в одной группе;

б) ровно двое окажутся в какой-то одной группе.

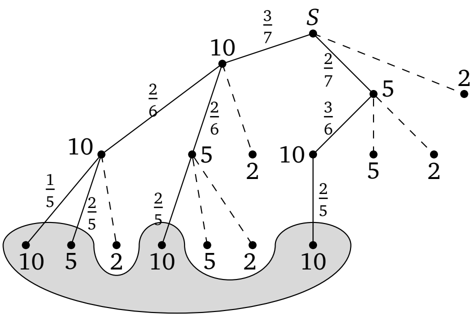
165. На столе лежали 10 монет: две по 10 рублей и остальные по 5 рублей. Сергей не глядя положил в один карман три какие-то монеты, а все остальные в другой карман. Найдите вероятность того, что обе десятирублёвые монеты оказались в одном кармане.

166*. За круглый стол на 18 стульев в случайном порядке сели 18 участников обсуждения. Среди них Андрей, Света и Дима. Найдите вероятность того, что их места оказались подряд.

Указание. В дереве организуйте три цепочки, соответствующие событию «Андрей сидит между Димой и Светой» и двумя аналогичными событиями: «Дима сидит между Андреем и Светой» и «Света сидит между Андреем и Димой». Впрочем, дерево можно устроить разными способами.

167*. У Кати в кармане три монеты по 10 рублей, две монеты по 5 рублей и две монеты по 2 рубля. Она хочет купить в киоске мороженое ценой 23 рубля. Катя не глядя достаёт из кармана три случайные монеты. Найдите вероятность того, что суммы, которую достала Катя, хватит на мороженое.

Пример решения. Нужно достать либо три монеты по 10 рублей, либо две монеты по 10 и одну монету 5 рублей. Удобно считать, что Катя достаёт монеты не все сразу, а по очереди — на суть дела это не влияет, зато понятно, как строить дерево. При построении дерева для простоты обозначим вершины цифрами, а не буквами.



Дерево построить несложно. Важно помнить, что по мере извлечения монет их количество в кармане меняется. Например, сначала вероятность вынуть монету 10 рублей равна $\frac{3}{7}$, но если эта монета вынута, то в кармане останутся всего две десятирублёвые монеты из шести. Поэтому вторая монета окажется десятирублёвой с вероятностью $\frac{2}{6}$ и т. д.

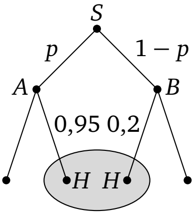
Событие $A = \{\text{денег хватит}\}$ состоит из цепочек S10 10 10, S10 10 5, S10 5 10 и S5 10 10. Вероятности каждой цепочки находим по правилу умножения:

$$P(A) = \frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}+\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{5}+\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{5}+\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5} = \frac{6+12+12+12}{7\cdot6\cdot5} = \frac{1}{5}.$$

168*. У Сергея в кармане две монеты по 10 рублей, три монеты по 5 рублей и три монеты по 1 рублю. Он хочет купить леденец за 12 рублей и не глядя достаёт из кармана две случайные монеты.

Найдите вероятность того, что суммы, которую достал Сергей, ему хватит.

169*. Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 95 % яиц из первого хозяйства — яйца высшей категории, а из второго хозяйства — 20 % яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 80 % яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.



Пример решения. Задача напоминает предыдущие. Логика подсказывает, что дерево нужно строить, отталкиваясь от хозяйств. Так и поступим. Первое хозяйство (точнее, событие «яйцо из первого хозяйства») обозначим A, второе — B. Высшую категорию будем помечать буквой H, а остальные нам не нужны. Неизвестную вероятность события $A = \{$яйцо из первого хозяйства$\}$ обозначим p.

Воспользуемся известным условием: вероятность события H равна 0,8. Этому событию благоприятствуют цепочки SAH и SBH, поэтому

$$P(H) = P(SAH) + P(SBH) = p \cdot 0{,}95 + (1-p) \cdot 0{,}2 = 0{,}75p + 0{,}2.$$

Составим уравнение

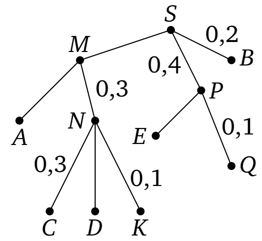
$$0{,}75p + 0{,}2 = 0{,}8, \quad \text{откуда} \quad p = \frac{0{,}6}{0{,}75} = 0{,}8.$$

170*. Всем пациентам с подозрением на одну из тропических лихорадок делают анализ крови. Если анализ выявляет вирус лихорадки, то результат анализа называется положительным. У больных лихорадкой пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,9. Если лихорадки нет, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,02. Известно, что у пациентов, поступающих с подозрением на лихорадку, анализ оказывается положительным в 19,6 % случаев. Найдите вероятность того, что поступивший с подозрением пациент действительно болен этой лихорадкой.

171*. На соревнования приехали теннисисты — всего 16 спортсменов, среди них четверо из России. Для первого круга все участники жеребьёвкой разбиваются на случайные пары. Найдите вероятность того, что в первом круге каждый российский спортсмен будет играть с кем-то тоже из России.

Задания для домашней работы

172. На рисунке изображено дерево некоторого случайного эксперимента с началом в точке S.



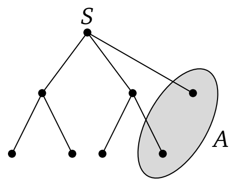
а) Изобразите дерево в своей тетради и напишите недостающие вероятности на рёбрах.

б) Сколько в этом случайном эксперименте элементарных событий?

в) Найдите вероятность цепочки $SMNK$.

г) Найдите вероятность события E.

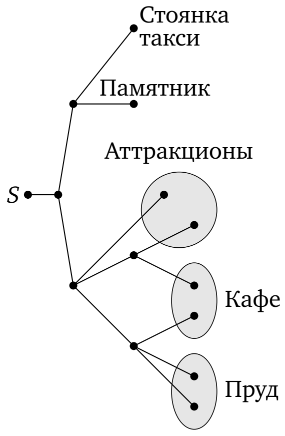
173. На рисунке изображено дерево некоторого случайного эксперимента с началом в точке S. Известно, что рёбра, выходящие из одной вершины, равновероятны. Закрашенной фигурой изображено событие A.



а) Изобразите дерево в тетради и напишите около каждого ребра соответствующую вероятность.

б) Найдите вероятность события A.

174. Виталий совершает прогулку по парку. Он вышел из точки S и на каждой развилке с равными шансами выбирает следующую дорожку. Схема дорожек показана на рисунке.



Найдите вероятность того, что Виталий:

а) придёт к кафе;

б) попадёт к стоянке такси или к аттракционам.

175. На заводе выпускают насосы для колодцев, из них 3 % выходят со сборочной линии со скрытым дефектом. При контроле качества продукции выявляется 90 % дефектных насосов. Остальные насосы поступают в продажу. Найдите вероятность того, что произведённый насос окажется в продаже.

176. Из ящика, в котором лежат фломастеры, не глядя достали два фломастера. Найдите вероятность того, что эти фломастеры оказались одного цвета, если известно, что:

а) в ящике 15 синих и 12 красных фломастеров;

б) в ящике 7 синих, 13 красных и 13 зелёных фломастеров.

177. Автоматическая линия изготавливает зарядные устройства для телефонов. Известно, что 3 % готовых устройств неисправны; 97 % неисправных устройств обнаруживаются при контроле качества продукции. Однако система контроля ошибочно бракует 1 % исправных устройств. Устройства, которые не забракованы, упаковываются и поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранное сошедшее с автоматической линии зарядное устройство поступит в продажу.

178. В коробке 100 болтов. Известно, что у двух болтов сорвана резьба. Сергей Петрович берёт из коробки 20 болтов. Найдите вероятность того, что:

а) оба плохих болта достанутся Сергею Петровичу;

б) оба плохих болта останутся лежать в коробке.

179*. У Кати в кармане две монеты по 10 рублей, две монеты по 5 рублей и две монеты по 2 рубля. Она хочет купить в киоске мороженое ценой 20 рублей. Катя не глядя достаёт из кармана три случайные монеты. Найдите вероятность того, что суммы, которую достала Катя, хватит на мороженое.

Раздел II

Эксперименты с последовательными испытаниями

§ 6. Испытания до первого успеха

Пояснение. Следуя традиции, будем называть *испытанием* простой эксперимент, в котором возможны два и только два элементарных исхода: *успех* и *неудача*. Например, однократное бросание монеты — испытание. Можно считать орёл успехом, а решку — неудачей или наоборот. Выбор успеха и неудачи зависит только от наших предпочтений. Например, на футбольном матче «Спартак» — «Зенит» у болельщиков «Спартака» успехом является как раз то, что у зенитовцев неудача, и наоборот.

Однократное бросание игральной кости вроде бы не является испытанием — шесть элементарных событий. Но можно заявить, что нам нужна только шестёрка — это успех. Все остальные варианты — неудача. Тогда бросание кости тоже становится испытанием.

Если обозначить вероятность успеха p, то вероятность неудачи становится равной $1-p$. Для краткости часто вводят обозначение для вероятности неудачи. Например, $q=1-p$.

Из отдельных испытаний строятся более сложные эксперименты. Например, можно провести 100 одинаковых испытаний и задаться вопросом, сколько случится успехов. Такие эксперименты мы рассмотрим в следующем параграфе.

Здесь мы изучим другой опыт — испытания проводятся до тех пор, пока не случится первый успех. В этот момент эксперимент заканчивается. Элементарными событиями в таком эксперименте можно считать последовательности неудач (Н) и успехов (У) такого вида:

$$\text{У, НУ, ННУ, НННУ, ННННУ, } \ldots$$

Количество элементарных исходов бесконечно, а их вероятности образуют геометрическую прогрессию

$$p,\ qp,\ q^2p,\ q^3p,\ q^4p,\ \ldots$$

Ситуаций, в которых возникает такая модель, довольно много в повседневной жизни. Поначалу удобно пользоваться деревьями, которые оказываются бесконечными, но от того не менее полезными и наглядными. Можно даже обойтись без упоминания геометрической прогрессии. Напротив, при изучении прогрессий в 9 классе вероятностный опыт с испытаниями до первого успеха можно и нужно использовать для предъявления важных и осмысленных примеров геометрической прогрессии в жизни.

Задачи для работы в классе

180. Проведите эксперимент. Возьмите обычную монету и бросайте (лучше трясти её в пластиковом стаканчике и выбрасывать на ладонь) до тех пор, пока не выпадет орёл. Сколько бросков для этого потребовалось?

Проведите такой эксперимент 4—5 раз и запишите, сколько бросков вам пришлось делать каждый раз. Пусть это сделает каждый в вашем классе. Соберите все результаты вместе. Можно построить таблицу (мы для иллюстрации провели 50 таких экспериментов).

Первый орёл выпал на броске №	1	2	3	4	5	6	7	*Всего*
Число таких экспериментов	26	14	6	1	2	0	1	50

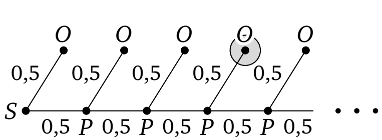
Ответьте на вопросы.

а) Что является элементарным событием в таком эксперименте?

б) Сколько элементарных событий в этом эксперименте?

181. Монету бросают до тех пор, пока не выпадет орёл. Найдите вероятность того, что к моменту выпадения орла будет сделано 4 броска.

Пример решения. Для наглядности изобразим эксперимент в виде дерева. Из начала S выходит два ребра — либо выпал орёл, либо решка. Если орёл — эксперимент кончается, если решка — снова два ребра и т. д. Вероятность каждого ребра 0,5.

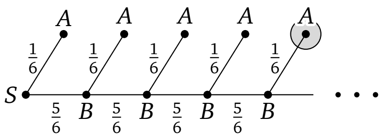


Нужное событие «орёл выпал при четвёртом броске» показано на дереве закрашенным кругом. К этому событию ведёт цепочка SPPPO, вероятность которой равна

$$0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}0625.$$

182. Игральную кость бросают до тех пор, пока не выпадет шестёрка. Найдите вероятность того, что будет сделано 5 бросков.

Пример решения. Построим дерево эксперимента. Вероятность выпадения шестёрки при каждом броске равна $\frac{1}{6}$. Это событие назовём A. Любое другое число очков имеет вероятность $\frac{5}{6}$. Обозначим такое событие B.



Событие «сделано пять бросков» изображено цепочкой $SBBBBA$. Вероятность этого равна

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5^4}{6^5} = \frac{625}{7776} \approx 0{,}08.$$

183. Монету бросают до тех пор, пока не выпадет орёл.

а) Постройте дерево эксперимента. Укажите на нём событие $A = \{$потребовалось три или четыре броска».

б) Найдите вероятность события A.

184. Игральную кость бросают до тех пор, пока не выпадет шестёрка. Найдите вероятность того, что это случится:

а) с третьей попытки;

б) не позже третьей попытки.

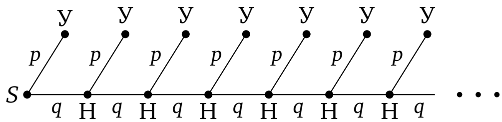
185. Производятся последовательные одинаковые и независимые испытания до тех пор, пока не наступит успех. В каждом отдельном испытании вероятность успеха равна p, а вероятность неудачи равна $q = 1 - p$. Найдите вероятность события:

а) успех случится при третьем испытании;

б) успех случится позже третьего испытания;

в) успех случится не позже пятого испытания.

Пример решения. С помощью дерева эксперимента (см. рисунок) находим, что событие $A = \{$успех при третьем испытании$\}$ представлено цепочкой SННУ и имеет вероятность $\mathrm{P}(A)=qqp=q^2p$.



Событию $B=\{$успех случится позже третьего испытания$\}$, т. е. на четвёртой, пятой попытке или позже, благоприятствуют цепочки

$$S\text{НННУ},\ S\text{ННННУ},\ S\text{НННННУ и т. д.}$$

Вместо того чтобы складывать бесконечное количество вероятностей всех этих цепочек, заметим, что все они имеют общее начало SННН. Вероятность этой цепочки найти легко: $P(B)=P(S\text{ННН})=q^3$.

Событию $C=\{$успех не позже пятого испытания$\}$ благоприятствуют цепочки SУ, SНУ, SННУ, SНННУ и SННННУ. Если мы знакомы с формулой суммы геометрической прогрессии, то можно сложить вероятности этих цепочек непосредственно. Поступим иначе: найдём вероятность противоположного события $\bar{C}=\{$успех наступит позже пятого испытания$\}$. Эта задача аналогична п. б):

$$P(\bar{C}) = P(S\text{ННННН}) = q^5.$$

Тогда $P(C)=1-P(\bar{C})=1-q^5$.

186. Производятся последовательные одинаковые и независимые испытания до тех пор, пока не наступит успех. В каждом отдельном испытании вероятность успеха равна p, а вероятность неудачи равна $q=1-p$. Найдите вероятность события:

а) успех случится при втором испытании;

б) успех случится позже четвёртого испытания;

в) успех случится не позже шестого испытания;

г) для достижения успеха потребуется от трёх до пяти испытаний.

187. Сергей отправляет СМС другу. Связь не очень устойчивая, поэтому каждая попытка отправить СМС имеет вероятность успеха 0,7. На каждую попытку телефон тратит три секунды. Найдите вероятность того, что:

а) СМС будет отправлена со второй попытки;

б) СМС будет отправлена не позже чем через шесть секунд (с первой или второй попытки).

188. Вероятность того, что мобильный телефон выйдет из строя в течение первого года работы, равна 0,2. Если телефон проработал какое-то время, то вероятность его поломки в течение следующего года такая же (телефон не содержит изнашивающихся деталей, поэтому вероятность его поломки не растёт со временем). Найдите вероятность того, что такой новый телефон выйдет из строя:

а) на четвёртый год службы;

б) не позже чем через три года после покупки.

189*. Производятся последовательные одинаковые и независимые испытания до тех пор, пока не наступит успех. В каждом отдельном испытании вероятность успеха равна p, а вероятность неудачи равна $q=1-p$. Пусть X — число испытаний, потребовавшихся для достижения успеха. Обобщив результаты задач 184 и 185, выведите формулы:

а) $\mathrm{P}(X=k)=q^{k-1}p$;

б) $\mathrm{P}(X>k)=q^k$;

в) $\mathrm{P}(X\leqslant k)=1-q^k$;

г) $\mathrm{P}(k\leqslant X\leqslant m)=q^{k-1}-q^m$.

190. Вероятность того, что новый планшет выйдет из строя в течение года после покупки, равна 0,1. Если планшет проработал несколько лет, то вероятность его поломки в течение следующего года такая же (в планшете нет изнашивающихся деталей, поэтому вероятность его поломки не растёт со временем). Найдите вероятность того, что такой новый планшет выйдет из строя:

а) на третий год службы;

б) прослужит больше трёх, но не больше пяти лет (округлите до тысячных).

Указание. В п. б) можно сложить вероятности событий «планшет сломается на четвёртый год» и «планшет сломается на пятый год». Можно вычесть из вероятности события «планшет прослужит больше трёх лет» вероятность события «планшет прослужит больше пяти лет». Второй способ более универсальный (см. следующую задачу).

191. Вероятность того, что новый телевизор с жидкокристаллическим экраном выйдет из строя в течение первого года работы, равна 0,1. Если телевизор проработал какое-то время, то вероятность его поломки в течение следующего года такая же (нет изнашивающихся деталей, поэтому вероятность поломки не увеличивается со временем). Найдите вероятность того, что такой новый телевизор прослужит больше пяти, но не больше восьми лет. Результат округлите до сотых.

192. Вероятность того, что мобильный телефон сломается в течение первого года службы, равна $p < 1$. Если телефон проработал несколько лет, то вероятность его поломки в течение следующего года такая же. Сравните вероятности следующих событий.

а) $A =$ {телефон выйдет из строя в течение первого года службы} и $B =$ {телефон выйдет из строя в течение второго года службы}.

б) $C =$ {телефон прослужит менее года} и $D =$ {телефон прослужит менее двух лет}.

в) Как результат, полученный в п. а), сочетается с тем, что вероятность выхода телефона из строя год от года не меняется?

Пример решения. а) $\mathrm{P}(A) = p > qp = \mathrm{P}(B)$, где $q = 1 - p$ вероятность того, что телефон проработает год без поломок.

б) Событие C содержится в событии D, поэтому $\mathrm{P}(C) < \mathrm{P}(D)$ (см., например, аналогичную задачу 80).

в) Вероятность поломки телефона во второй год — это не то же самое, что вероятность поломки телефона во второй год при условии, что он уже прослужил год до этого. Противоречия нет.

193. В корабельной артиллерии применяется система управления огнём. Орудие делает выстрел по цели. Если цель не поражена, делается ещё один выстрел. Третий выстрел не делается. Известно, что вероятность поражения цели каждым одним выстрелом равна 0,9. Найдите вероятность того, что:

а) цель будет поражена только вторым выстрелом;

б) цель вообще не будет поражена.

194*. В корабельной артиллерии применяется система управления огнём. Орудие делает выстрел по цели. Если цель не поражена, делается ещё один выстрел. Третий выстрел не делается. Предположим, что вероятность поражения цели каждым выстрелом равна 0,9.

а) На сколько вырастет вероятность поражения цели, если дать системе возможность делать третий выстрел в случае, когда два первых неудачные?

б) Как вы думаете, почему на практике систему ограничивают двумя разрешёнными выстрелами?

195. Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не попадёт в неё. Вероятность попадания при каждом отдельном выстреле равна $p = 0{,}6$. Найдите вероятность того, что стрелку потребуется:

а) ровно 5 попыток;

б) от 2 до 4 попыток.

Результаты округлите до тысячных.

196*. Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не попадёт в неё. Вероятность попадания при каждом отдельном выстреле равна $p=0{,}6$. Найдите вероятность того, что стрелку потребуется:

а) более 7 попыток;

б) не более 6 попыток;

в) охарактеризуйте правдоподобность событий из п. а) и б).

197*. Инженеры проектируют систему передачи информации с самолёта на землю. Возможны атмосферные помехи, поэтому система должна уметь делать много попыток, чтобы достичь успеха. Но разрешённое число попыток нужно всё же ограничить, чтобы система не зависла. По техническому заданию вероятность передачи информации должна быть не ниже 0,98, если вероятность успеха в каждой одной попытке 0,1. Каким числом ограничить разрешённое число попыток?

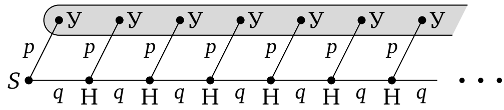
Пример решения. Пусть n — разрешённое число попыток. Тогда вероятность того, что успех наступит не позже n-й попытки, равна $1-q^n$, где $q=0{,}9$ — вероятность неудачи при каждой одной попытке. Следовательно, нужно решить неравенство $1-q^n \geqslant 0{,}98$, т. е. $0{,}9^n \leqslant 0{,}02$.

Это легко сделать, если нам известны свойства логарифма. Если нет, то можно подобрать n путём проб и ошибок. С помощью калькулятора получаем, что $0{,}9^{37} \approx 0{,}0203 > 0{,}02$, а $0{,}9^{38} \approx 0{,}0182 < 0{,}02$. Значит, нужно разрешить 38 попыток.

198*. Инженеры проектируют систему автоматической передачи информации от автомобиля в кризисный центр в случае аварии. Возможны помехи разного рода, поэтому система должна уметь делать несколько попыток, чтобы достичь успеха. Число попыток нужно ограничить, чтобы система не зависла. По техническому заданию вероятность передачи информации должна быть не ниже 0,95, если вероятность успеха в каждой одной попытке 0,2. Каким числом ограничить разрешённое число попыток?

199*. Предположим, что успех в испытании наступает с вероятностью $p<1$. Покажите, что рано или поздно успех произойдёт, как бы ни была мала вероятность p. Иными словами, покажите, что в случайном опыте с испытаниями до первого успеха событие «успех никогда не случится» имеет вероятность 0, а противоположное событие «успех в каком-то испытании произойдёт» имеет вероятность 1.

Пример доказательства. Рассмотрим уже знакомое нам дерево эксперимента:



Событию $A = \{$успех рано или поздно случится$\}$, показанному на рисунке закрашенной полосой, благоприятствуют все цепочки

$$S\text{У},\ S\text{НУ},\ S\text{ННУ},\ S\text{НННУ},\ \ldots$$

Значит,

$$\mathrm{P}(A) = p + qp + q^2p + q^3p + \ldots$$

Получилась сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии с первым членом p и со знаменателем q:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{p}{1-q} = \frac{p}{p} = 1.$$

Следовательно, вероятность события $\bar{A} = \{$успех никогда не наступит$\}$ равна нулю. □

Указание. Если вы не знакомы с формулой суммы бесконечной геометрической прогрессии, можно найти эту сумму иначе:

$$\mathrm{P}(A) = p + qp + q^2p + q^3p + \ldots = p + q(p + qp + q^2p + \ldots) = p + q\mathrm{P}(A).$$

Из уравнения $\mathrm{P}(A) = p + q\mathrm{P}(A)$ получаем

$$\mathrm{P}(A)\cdot(1-q) = p; \quad \mathrm{P}(A) = \frac{p}{1-q} = \frac{p}{p} = 1.$$

Задания для домашней работы

200. Найдите вероятность того, что при последовательных бросаниях монеты решка первый раз выпадет:

а) при третьем броске;

б) при втором или четвёртом броске.

201. Игральную кость бросают до тех пор, пока не выпадет 5 или 6 очков.

а) Какова вероятность того, что это событие случится при первом же броске?

б) Найдите вероятность того, что это событие произойдёт при четвёртом броске.

202. Производятся последовательные одинаковые и независимые испытания до тех пор, пока не наступит успех. В каждом отдельном испытании вероятность успеха равна p, а вероятность неудачи равна $q = 1 - p$. Найдите вероятность события:

а) успех случится при втором испытании;

б) успех случится позже девятого испытания;

203. На зачёте по физкультуре (прыжки в длину с места) каждому даётся три попытки, чтобы преодолеть отметку 180 см. Девятиклассник Петров прыгает на такое расстояние с вероятностью 0,7. Найдите вероятность того, что Петров в этот раз зачёт не сдаст.

204. Баскетболист М. на тренировке отрабатывает бросок мяча в корзину с дальней дистанции. Тренер считает, что М. попадает в корзину при каждом отдельном броске с вероятностью 0,6. Исходя из этого найдите вероятность того, что М. первый раз промахнётся при четвёртом броске. Результат округлите до тысячных.

205. Сергей отправляет СМС другу. Связь плохая, поэтому каждая попытка отправить СМС имеет вероятность успеха 0,2. Найдите вероятность того, что:

а) СМС будет отправлена ровно с четвёртой попытки;

б) СМС будет отправлена не позже чем с четвёртой попытки.

206. Вероятность того, что мобильный телефон выйдет из строя в течение первого года службы, равна 0,1. Если телефон проработал какое-то время, то вероятность его поломки в течение следующего года такая же. Найдите вероятность того, что такой новый телефон прослужит хотя бы четыре года.

§ 7. Серии испытаний Бернулли

Пояснение. В этом параграфе собраны задачи, для решения которых используется так называемая *формула Бернулли*[1], или схема Бернулли. Суть эксперимента проста — проводится n (заранее известное число) одинаковых независимых испытаний, и нас интересует число наступивших успехов. Можно, например, ставить вопрос о вероятности события «случилось 8 успехов из 10» или — что сложнее — события «успехов не менее 6 из 10» и т. п.

Вероятность того, что в серии из n испытаний случится ровно k успехов (событие A_k), равна

$$\mathrm{P}(A_k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где p — вероятность успеха, а $q = 1 - p$ — вероятность неудачи в каждом отдельном испытании.

В формуле Бернулли присутствует множитель C_n^k, равный числу способов получить k успехов в последовательности из n испытаний. Как известно,

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Само по себе число сочетаний C_n^k не имеет прямого отношения к теории вероятностей. Практика показывает, что это весьма сложный для школьников объект, к которому нужно привыкнуть. Представляется разумным до тех пор, пока речь идёт о небольших n, пользоваться таблицей чисел C_n^k, которая называется *треугольником Паскаля*.

В нескольких задачах, где недостаточно таблицы, предложено пользоваться компьютером. Например, Excel содержит специальные функции для числа сочетаний и для расчёта по формуле Бернулли. Функция

$$= \text{ЧИСЛКОМБ}(n; k)$$

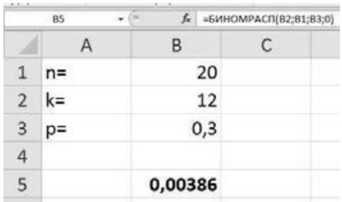
вычисляет C_n^k, а функция

$$= \text{БИНОМРАСП}(k; n; p; 0)$$

сразу вычисляет значение выражения $C_n^k p^k q^{n-k}$. На рисунке приведён пример вычисления: вероятность получить 12 успехов в 20 ис-

[1] Якоб Бернулли (1655—1705) — швейцарский математик. Один из основателей теории вероятностей. Ввёл значительную часть современных понятий теории вероятностей и сформулировал первый вариант закона больших чисел.

пытаниях с вероятностью успеха 0,3 в каждом приближённо равна 0,00386.



B5 =БИНОМРАСП(B2;B1;B3;0)

	A	B	C
1	n=	20	
2	k=	12	
3	p=	0,3	
4			
5		**0,00386**	

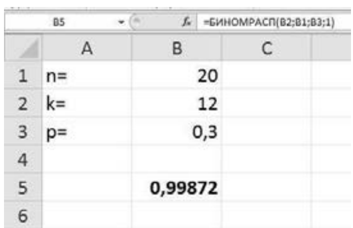
Ещё интереснее функция

$$= \text{БИНОМРАСП}(k; n; p; 1),$$

которая проводит вычисления по формуле

$$C_n^0 p^0 q^n + C_n^1 p^1 q^n + \ldots + C_n^k p^k q^{n-k},$$

т. е. вычисляет вероятность того, что успехов будет k или меньше. На рисунке приведён пример, показывающий, что в том же эксперименте вероятность не более 12 успехов (12 или меньше) приближённо равна 0,99872.



B5 =БИНОМРАСП(B2;B1;B3;1)

	A	B	C
1	n=	20	
2	k=	12	
3	p=	0,3	
4			
5		**0,99872**	
6			

Вероятностная схема с сериями испытаний Бернулли используется везде, где возникают выборочные обследования, — в социологии (опрос населения или прогноз результатов выборов), в производстве (оценка доли бракованной продукции), в маркетинге (прогноз спроса на тот или иной товар), медицине (прогноз эффективности лечения, побочных действий лекарств), психологии и т. п. Список можно продолжать практически бесконечно.

Задачи для работы в классе

207. Рассмотрите два различных эксперимента. Первый эксперимент: монету бросают до тех пор, пока не выпадет орёл. Второй эксперимент: монету бросают 10 раз. Ответьте на вопросы.

а) Что является элементарным событием в первом эксперименте?

б) Что является элементарным событием во втором эксперименте? Приведите пример.

208. Подбросьте монету 10 раз и подсчитайте число выпавших орлов. Пусть это сделает каждый в вашем классе по одному или несколько раз. Соберите все результаты. Удобно записать их в таблицу (мы провели эксперимент для 50 серий по 10 бросаний в каждой).

Число орлов	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	*Всего*
Сколько раз случилось	0	0	0	6	11	7	13	11	2	0	0	50

Ответьте на вопросы.

а) Случилось ли у кого-нибудь хотя бы раз 0 орлов или 10 орлов? Если да, то как можно охарактеризовать эти события?

б) Какое число орлов наиболее типичное? Найдите медиану числа выпавших орлов.

в) Можно ли выделить промежуток типичных результатов?

г) По вашему мнению, какое число орлов более вероятно: 2 или 5, 2 или 8?

Обсуждение. Число орлов 0 или 10 — весьма маловероятные события: вероятность каждого $\frac{1}{1024}$, поэтому если такое у кого-то случилось, то его смело можно назвать везунчиком дня.

Типичными можно считать результаты от 3 до 7 или даже от 2 до 8 орлов, смотря по тому, что что считать типичным событием. Медиана в таком опыте обычно получается от 4 до 6. В нашем эксперименте (см. таблицу) медиана равна 6: более половины экспериментов (37) дали не более шести орлов и более половины экспериментов (26) дали не менее шести орлов.

Результаты эксперимента и здравый смысл подсказывают, что 2 орла менее вероятно, чем 5 орлов. При сравнении вероятностей 2 и 8 орлов можно опираться только на здравый смысл: каждая последовательность, в которой 8 решек и 2 орла, имеет такие же шансы, как последовательность, в которой 2 решки и 8 орлов, — достаточно поменять орлов и решек местами.

209. Обдумайте ещё раз проведённый эксперимент (задача 208) и ответьте на вопрос: а что если вместо 10 бросаний одной монеты мы одновременно бросили бы 10 монет? Повлияло бы это изменение на число выпавших орлов?

Пример решения. Не повлияло бы. Чтобы это понять, представим, что на монеты наклеены бумажки с номерами от 1 до 10. Тогда вместо номера бросания можно рассматривать номер монеты, и всё равно сохраняется последовательность выпадения орлов и решек.

210. В эксперименте подбрасывают монету несколько раз (или подбрасывают несколько монет один раз). Какое число орлов теоретически может выпасть, если бросков (монет):

а) 3; б) 6; в) n?

211. Симметричную монету бросают три раза. Запишите все элементарные исходы в этом эксперименте. Около каждого подпишите число орлов и найдите вероятности событий «выпало k орлов» для всех возможных k. Заполните таблицу.

3 монеты

Число выпавших орлов (k)	0	1	2	3
Вероятность				

Пример решения.

ООО	3	РОО	2
ООР	2	РОР	1
ОРО	2	РРО	1
ОРР	1	РРР	0

Обратите внимание на то, что исходы удобнее записывать, пользуясь какой-нибудь системой, иначе легко что-либо потерять. В данном случае мы записали в левом столбце все исходы с О в начале, а в правом — такие же, но с Р в начале.

Событие «выпало k орлов» для простоты обозначим A_k. Всего равновозможных исходов восемь: $N = 8$. Исход РРР без орлов единственный: $N(A_0) = 1$, поэтому $\mathrm{P}(A_0) = \frac{1}{8}$.

Аналогично получаем

$$\mathrm{P}(A_1) = \frac{3}{8}, \quad \mathrm{P}(A_2) = \frac{3}{8} \quad \text{и} \quad \mathrm{P}(A_3) = \frac{1}{8}.$$

212. Монету бросают два раза. Запишите все элементарные исходы в этом эксперименте. Около каждого подпишите число орлов и найдите вероятности событий «выпало k орлов» для всех возможных k. Заполните таблицу.

Число выпавших орлов (k)	0	1	2
Вероятность			

213. Монету бросают четыре раза. Запишите все элементарные исходы в этом эксперименте. Около каждого подпишите число орлов и найдите вероятности событий «выпало k орлов» для всех возможных k. Заполните таблицу.

4 монеты

Число выпавших орлов (k)	0	1	2	3	4
Вероятность					

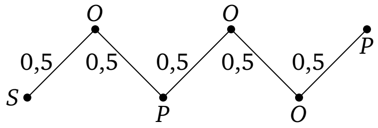
214. Симметричную монету подбрасывают 5 раз.

а) Запишите два каких-нибудь элементарных исхода, благоприятствующих событию «выпало 2 орла». Есть ли ещё такие исходы?

б) Найдите вероятности элементарных исходов ОРООР и ОРРОО.

в) Что можно сказать про вероятности двух любых элементарных исходов этого эксперимента?

Указание. При решении п. б) можно использовать равновозможность исходов, если сообразить, что их 32. Можно напрямую воспользоваться правилом умножения, можно составить дерево без лишних вершин — оно просто превращается в цепочку. Например, для исхода ОРООР получается



215. Симметричную монету подбрасывают 6 раз.

а) Запишите два каких-нибудь элементарных исхода, благоприятствующих событию «выпало 4 орла». Есть ли ещё такие исходы?

б) Найдите вероятности исходов ОРОРОР и ОРРРОО.

в) Что можно сказать про вероятности двух любых элементарных исходов этого эксперимента?

216. Симметричную монету подбрасывают 12 раз.

а) Запишите два каких-нибудь элементарных исхода, благоприятствующих событию «выпало 5 орлов».

б) Чему равна вероятность каждого элементарного исхода в таком эксперименте?

в) Найдите вероятность события «выпало 0 орлов».

Указание. При решении п. в) используется очевидный факт: событию «выпало 0 орлов» благоприятствует единственный исход — двенадцать решек подряд: РРРРРРРРРРРР.

217. Симметричную монету бросают 7 раз (или подбрасывают 7 монет).

а) Запишите какой-нибудь элементарный исход, благоприятствующий событию «выпало 3 орла», и найдите его вероятность.

б) Известно, что всего в этом эксперименте 35 исходов с 3 орлами. Найдите вероятность события $A_3 = \{$при бросании 7 монет выпало 3 орла$\}$.

218. Симметричную монету бросают 6 раз (или подбрасывают 6 монет). Известно, что всего в этом эксперименте 15 исходов с 2 орлами и 20 исходов с 3 орлами.

а) Найдите вероятность события $A_2 = \{$при бросании 6 монет выпало 2 орла$\}$.

б) Найдите вероятность события $A_3 = \{$при бросании 6 монет выпало 3 орла$\}$.

в) Найдите вероятность события $A_4 = \{$при бросании 6 монет выпало 4 орла$\}$.

Указание. При решении п. в) нужно использовать то, что исходов с 4 орлами столько же, сколько исходов с 2 орлами (см. задачу 208).

219. Подбрасывают 8 монет. Что нужно дополнительно знать, чтобы найти вероятность события $A_3 = \{$при бросании 8 монет выпало 3 орла$\}$?

220. Подбрасывают 8 монет. Найдите в треугольнике Паскаля число C_8^3 и вычислите вероятность события $A_3 = \{$при бросании 8 монет выпало 3 орла$\}$.

Пример решения. В таблице находим $C_8^3 = 56$. Вероятность каждого исхода в таком эксперименте равна $\frac{1}{2^8}$. Тогда

$$\mathrm{P}(A_3) = C_8^3 \cdot \frac{1}{2^8} = \frac{56}{256} = \frac{7}{32}.$$

221. Подбрасывают 7 монет. Пользуясь треугольником Паскаля, найдите вероятности событий:

а) $A_4 = \{$выпало 4 орла$\}$; б) $A_2 = \{$выпало 2 орла$\}$;
в) $B_3 = \{$выпало 3 решки$\}$; г) $B_2 = \{$выпало 2 решки$\}$.

222. Подбрасывают 9 монет. Пользуясь треугольником Паскаля, найдите вероятности событий:

а) $A_4 = \{$выпало 4 орла$\}$; б) $A_3 = \{$выпало 3 орла$\}$;
в) $B_6 = \{$выпало 6 решек$\}$; г) $A_7 = \{$выпало 7 орлов$\}$.

223. Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. В ходе турнира команда «Статор» по очереди играет с четырьмя другими командами. Найдите вероятность того, что «Статор» будет владеть мячом в начале:

а) только первой и последней игр; б) двух игр из четырёх.

224. Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. В подгруппе восемь команд. В ходе турнира команда «Генератор» по очереди играет со всеми другими командами своей подгруппы. Найдите вероятность того, что «Генератор» будет владеть мячом в начале:

а) ровно трёх игр; б) двух или трёх игр.

225. Игральную кость бросают 4 раза. Успехом считается выпадение «шестёрки».

а) Пользуясь обозначениями У и Н для успеха и неудачи, запишите все элементарные события этого эксперимента, благоприятствующие появлению одного успеха.

б) Найдите вероятность элементарного события УННУ в таком эксперименте.

в) Верно ли, что в таком эксперименте вероятности всех элементарных событий равны?

Пример решения. Появлению одного успеха благоприятствуют все цепочки с одной буквой У и тремя буквами Н.

Вероятность успеха равна $\frac{1}{6}$, а вероятность неудачи $\frac{5}{6}$. Вероятность события УННУ найдём, пользуясь правилом умножения (можно изобразить вспомогательное дерево):

$$\mathrm{P}(\text{УННУ}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{1296}.$$

Поскольку вероятности успеха и неудачи различны, вероятности элементарных событий разные — они зависят от числа успехов. Например, цепочки НУУУ и НННУ имеют разные вероятности.

226. Игральную кость бросают 4 раза. Успехом считается выпадение «шестёрки».

а) Найдите вероятность элементарного события УНУУ.

б) Найдите вероятность элементарного события УННН.

227. Игральную кость бросают 5 раз. Найдите вероятность события:

а) «шестёрка выпала ровно два раза»;

б) «шестёрка выпала ровно четыре раза»;

в) «шестёрка выпала не менее двух раз».

Указание. Коэффициенты C_5^k берутся из таблицы (треугольник Паскаля). При решении п. в) удобно сначала найти вероятность противоположного события «шестерка выпала меньше двух раз», а для этого достаточно сложить вероятности событий «шестёрка не выпала ни разу» и «шестёрка выпала один раз».

228. Производится 6 одинаковых независимых испытаний с вероятностью успеха p в каждом испытании.

а) Выразите через p вероятность неудачи q в одном испытании;

б) Выразите через p и q вероятность события $A_2 = \{$случилось ровно 2 успеха$\}$;

в) Вычислите эту вероятность, если $p = 0{,}2$. Округлите результат до тысячных.

Указание. В этой и в подобных задачах конечные вычисления, как в п. в), есть смысл выполнять при наличии калькулятора или компьютера.

229. Производится 8 одинаковых независимых испытаний с вероятностью успеха p и вероятностью неудачи q в каждом испытании. Выразите через p и q вероятности событий:

а) $A_3 = \{$случилось ровно 3 успеха$\}$;

б) $A_4 = \{$случилось ровно 4 успеха$\}$;

в) Вычислите эти вероятности при $p = 0{,}2$. Округлите результаты до тысячных.

230. На фабрике производят батарейки. В среднем 2 % батареек, поступающих в продажу, неисправны. Найдите вероятность (округлите до тысячных) того, что в упаковке, в которой 10 батареек окажется:

а) ровно одна неисправная;

б) ровно две неисправные;

в) не более одной неисправной;

г) охарактеризуйте правдоподобность этих событий.

Пример решения. Задача сводится к вопросу о вероятностях числа успехов (успехом здесь служит событие «батарейка неисправна») в серии из 10 испытаний Бернулли с вероятностью успеха $p = 0{,}02$ в каждом испытании.

Указание. При ответе на вопрос г) следует заранее выбрать для себя какое-нибудь правило. Например, можно считать события с вероятностью менее 0,05 практически невозможными и пренебрегать ими. Напротив, события с вероятностью больше 0,95 можно считать практически достоверными и полагаться на их наступление. Правило можно выбрать произвольно, учитывая, насколько неприятно или опасно нежелательное событие. В случае с покупкой батареек, видимо, ничего ужасного не произойдёт, если одна окажется бракованной. Хотя не исключено, что все десять батареек необходимы для жизненно важных медицинских аппаратов. Тогда вероятность 0,05 слишком большая — нежелательное событие должно быть гораздо менее вероятным. Нужно подумать о запасных батарейках.

231. На заводе делают электрические лампочки. В среднем 3 % лампочек бракованные. Найдите вероятность (округлите до тысячных) того, что в упаковке, в которой 6 лампочек:

а) окажется ровно одна бракованная;

б) не окажется ни одной бракованной;

в) окажется хотя бы одна бракованная;

г) охарактеризуйте эти события с точки зрения их правдоподобности.

Указание. При решении п. в) удобно пользоваться результатом п. б), поскольку в этих пунктах требуется найти вероятности противоположных событий.

232. Тренер полагает, что баскетболист А. попадает в корзину в среднем 7 раз из 10. Считая это предположение верным, найдите вероятность того, что А. попадёт в корзину хотя бы 5 раз из 6 попыток. Результат округлите до сотых.

233. Стрелок поражает мишень одним выстрелом с вероятностью 0,8. У стрелка 8 патронов. Найдите вероятность того, что стрелок промахнётся:

а) ровно один раз; б) не более одного раза.

Результаты округляйте до тысячных.

234. Производится серия из 10 испытаний с вероятностью успеха $p = 0{,}3$. Что более вероятно в этой серии: ровно четыре успеха или ровно пять успехов?

Пример решения. В этой задаче вероятности можно не вычислять. Достаточно сравнить отношение вероятностей с единицей:

$$\frac{\mathrm{P}(A_5)}{\mathrm{P}(A_4)} = \frac{C_{10}^5 p^5 q^5}{C_{10}^4 p^4 q^6} = \frac{252p}{210q} = \frac{6p}{5q} = \frac{6\cdot 0{,}3}{5\cdot 0{,}7} = \frac{1{,}8}{3{,}5} < 1.$$

Следовательно, $\mathrm{P}(A_5) < \mathrm{P}(A_4)$.

235. Производится серия из 8 испытаний с вероятностью успеха $p = 0{,}6$. Что более вероятно в этой серии:

а) ровно четыре успеха или ровно пять успехов;

б) ровно три успеха или ровно четыре успеха?

236. Система ПВО выпускает по цели почти одновременно три ракеты. Известно, что каждая из ракет поражает цель независимо от других ракет с вероятностью 0,7.

а) Найдите вероятность того, что цель будет поражена хотя бы одной ракетой.

б) Сравните эту задачу с задачей 194 и подумайте, почему применяются разные вероятностные схемы: в корабельной артиллерии делают два выстрела с промежуточным контролем попадания, а в ПВО — три ракетных пуска без промежуточного контроля.

Пример решения и обсуждения. Три ракеты — три испытания Бернулли. Вероятность успеха в каждом $p=0{,}7$, неудачи — $q=0{,}3$. Найдём вероятность противоположного события: «цель не поражена ни разу», т. е. события $A_0=\{0 \text{ успехов}\}$:

$$\mathrm{P}(A_0) = q^3 = 0{,}027.$$

Следовательно, вероятность события «цель поражена», т. е. «хотя бы один успех», равна $1-0{,}027=0{,}973$.

При обсуждении вопроса б) следует учитывать, что самолёты летают быстро и очень маневренны. На контроль просто не хватает времени. Цель нужно уничтожить практически наверняка и быстро. В случае с корабельной артиллерией всё иначе: наземные и надводные цели не могут очень быстро изменить своё положение.

237*. Помещение освещено 12 лампами. Известно, что вероятность перегорания каждой лампы в течение года равна 0,35. Лампы перегорают независимо друг от друга. Найдите наиболее вероятное число перегоревших за год ламп.

Пример решения. Мы имеем серию из $n=12$ испытаний Бернулли с вероятностью успеха (хотя трудно перегорание считать успехом) $p=0{,}35$. Интуитивно понятно, что наиболее вероятное число перегоревших ламп должно быть близко к $pn=0{,}35\cdot 12=4{,}2$. Найдём точно. Запишем отношение вероятностей событий $A_k=\{k \text{ успехов}\}$ и $A_{k-1}=\{k-1 \text{ успехов}\}$:

$$\frac{\mathrm{P}(A_k)}{\mathrm{P}(A_{k-1})} = \frac{C_{12}^k p^k q^{12-k}}{C_{12}^{k-1} p^{k-1} q^{13-k}} = \frac{12!\cdot(k-1)!\cdot(13-k)!\cdot p}{k!\cdot(12-k)!\cdot 12!\cdot q} = \frac{(13-k)p}{kq} = \frac{0{,}35(13-k)}{0{,}65k}.$$

Найдём k, при которых эта дробь больше единицы:

$$\frac{0{,}35(13-k)}{0{,}65k} > 1, \quad 0{,}35(13-k) > 0{,}65k, \quad k < 0{,}35\cdot 13 = 4{,}55.$$

Кроме того, при $k > 4{,}55$ отношение меньше единицы. Следовательно, вероятности возрастают до $k = 4$ и убывают при $k \geqslant 5$. Наиболее вероятное число успехов 4, что и следовало ожидать.

238*. Баскетболист П. тренируется в бросках в корзину с шести метров. Тренер считает, что П. попадает в корзину в среднем 73 раза из 100. П. бросает мяч 50 раз. Каково наиболее вероятное число попаданий в корзину, если считать, что тренер прав?

239*. Система ПВО должна поражать летящую цель с вероятностью не менее 0,95. Система с интервалом в несколько секунд выпускает по цели несколько ракет. Известно, что каждая отдельная ракета поражает цель с вероятностью 0,6.

а) Достаточно ли 3 ракет, чтобы цель была поражена с вероятностью не менее 0,95?

б) Достаточно ли 4 ракет?

Пример решения. Требуется, чтобы в серии из трёх или четырёх испытаний Бернулли с вероятностью успеха $p = 0{,}6$ успех наступил хотя бы раз. Будем искать вероятность противоположного события «цель не поражена ни разу». Если ракет три, то эта вероятность равна

$$\mathrm{P}(A_0) = 0{,}4^3 = 0{,}064.$$

Тогда вероятность поражения цели равна 0,936. Недостаточно.

Если ракет четыре, то

$$\mathrm{P}(A_0) = 0{,}4^4 = 0{,}0256.$$

Вероятность поражения равна 0,9744.

240*. Система ПВО с интервалом несколько секунд выпускает по цели несколько ракет. Известно, что каждая отдельная ракета поражает цель с вероятностью 0,65. Какое наименьшее число ракет нужно, чтобы поразить цель с вероятностью не менее 0,99?

241*. В походе будут нужны 6 батареек для фонарей. Считая, что каждая батарейка может оказаться неисправной с вероятностью 0,02, определите, сколько батареек нужно взять, чтобы среди них оказалось хотя бы 6 исправных с вероятностью 0,95 или выше.

Пример решения. Задача обратна тем, что мы уже решали. Неизвестно количество испытаний, зато известно, что успехов (исправных батареек) должно быть хотя бы 6. Если вероятность неисправной батарейки $q = 0{,}02$, то вероятность исправной батарейки равна $p = 0{,}98$. Событие «ровно k успехов», как и прежде, обозначим A_k. Округлять вероятности будем до тысячных.

Если купить 6 батареек, то вероятность того, что все шесть исправны, равна $\mathrm{P}(A_6) = p^6 \approx 0{,}886 < 0{,}95$. Мало.

Если же взять 7 батареек, то вероятность ровно 6 исправных батареек равна $\mathrm{P}(A_6) = 7p^6q \approx 0{,}124$, а ровно 7 исправных — $\mathrm{P}(A_7) = p^7 = 0{,}868$. Тогда вероятность того, что исправных батареек будет хотя бы 6, равна $\mathrm{P}(A_6) + \mathrm{P}(A_7) \approx 0{,}992 > 0{,}95$. Значит, достаточно купить 7 батареек.

242*. Анна Петровна хочет посадить вдоль дорожки на даче 4 розовых куста и по этой причине отправляется в магазин за саженцами. По опыту она знает, что из 10 саженцев в среднем два саженца не приживаются. Сколько саженцев должна купить Анна Петровна, чтобы с вероятностью не менее 0,9 хотя бы четыре из них прижились?

Задания для домашней работы

243. Симметричную монету подбрасывают 5 раз.

а) Запишите два каких-нибудь элементарных исхода, благоприятствующих событию «выпало 3 орла».

б) Найдите вероятности элементарных исходов ОРРОР и ОРООО.

244. Симметричную монету подбрасывают 10 раз.

а) Чему равна вероятность каждого элементарного исхода в таком эксперименте?

б) Найдите вероятность события «выпало 0 орлов».

245. Подбрасывают 8 монет. Пользуясь треугольником Паскаля, найдите вероятности событий:

а) $A_4 = \{$выпало 4 орла$\}$; б) $A_3 = \{$выпало 3 орла$\}$;

в) $B_2 = \{$выпало 2 решки$\}$; г) $B_7 = \{$выпало 7 решек$\}$.

246. Игральную кость бросают 4 раза. Найдите вероятность события:

а) «пятёрка выпала ровно 1 раз»;

б) «четвёрка выпала ровно 2 раза»;

в) «двойка выпала 1 или 2 раза».

247. Производится 9 одинаковых независимых испытаний с вероятностью успеха p и вероятностью неудачи q в каждом испытании. Выразите через p и q вероятности событий:

а) «случилось ровно 4 успеха»;

б) «случилось ровно 5 успехов»;

в) вычислите эти вероятности при $p = 0{,}1$ (округлите результаты до тысячных).

248. Производится 7 одинаковых независимых испытаний с вероятностью успеха p и вероятностью неудачи q в каждом испытании. Выразите через p и q вероятности событий:

а) «случилось ровно 3 успеха»;

б) «случилось 5 или 6 успехов»;

в) вычислите эти вероятности при $p = 0{,}3$ (округлите результаты до тысячных).

249. Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. В ходе турнира команда «Юниор» по очереди играет с 6 другими командами. Найдите вероятность того, что «Юниор» проиграет мяч в начале:

а) ровно 2 игры из 6; б) 4 или 5 игр.

Результаты округляйте до тысячных.

250. На фабрике производят батарейки. В среднем 3 % батареек, поступающих в продажу, неисправны. Найдите вероятность (округлите до тысячных) того, что в упаковке с 10 батарейками:

а) окажется ровно 1 неисправная;

б) окажутся ровно 2 неисправные;

в) окажется меньше 2 неисправных.

251. Биатлонист поражает мишень каждым отдельным выстрелом с вероятностью 0,6. Он стреляет 5 раз по пяти мишеням — по каждой только 1 раз. Найдите вероятность того, что он поразит:

а) ровно 3 мишени; б) не менее 4 мишеней.

Результаты округляйте до тысячных.

252*. Производится серия из 15 испытаний с вероятностью успеха $p = 0{,}27$ в каждом. Найдите наиболее вероятное число успехов в такой серии.

253*. Система ПВО с интервалом в несколько секунд выпускает по цели несколько ракет. Известно, что каждая отдельная ракета поражает цель с вероятностью 0,75 независимо от других ракет.

а) Достаточно ли 2 ракет, чтобы цель была поражена с вероятностью не менее 0,98?

б) Достаточно ли 3 ракет?

в) С какой вероятностью цель будет поражена хотя бы одной из 3 ракет? Результат округлите до тысячных.

§ 8. Случайный выбор из конечной совокупности

Пояснение. В этом параграфе собраны задачи, где происходит случайный выбор из некоторого множества людей или предметов, причём в ходе эксперимента множество уменьшается.

Общая схема такова: имеется множество объектов, часть из них каким-то образом помечены (красные шары среди всех шаров, мальчики среди всех школьников, белые вороны среди всех ворон и т. п.). Случайным образом из этого множества выбирают какую-то часть, и возникает вопрос, сколько помеченных объектов оказалось среди выбранных. Такие задачи мы уже решали: вспомните задачи 57, 58, 161, 162, где из какой-то группы людей выбираются двое или трое и вычисляется с какой вероятностью часть из них или все они попадут в одну какую-то подгруппу. Если выбирается 2 или даже 3 объекта, то специальные методы не нужны — можно так организовать эксперимент, что вопрос сводится к перечислению небольшого и очевидного числа элементарных исходов или к рассмотрению несложного дерева. Всё не так просто, если выбранных объектов много.

Пример. Предположим, что в ящике 7 белых и 13 чёрных шаров. Случайным образом извлекаем 9 шаров. Какова вероятность того, что среди выбранных шаров окажется ровно 4 белых?

Пример решения. Потребуются начальные сведения из комбинаторики. Число способов выбрать k объектов из n имеющихся обозначают C_n^k. Это число можно найти по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Всего существует $N = C_{20}^9$ способов выбрать 9 шаров из 20. Найдём число исходов, благоприятствующих событию $A = \{$выбрано 4 белых и 5 чёрных$\}$. Четыре белых шара выбираются из 7 имеющихся, поэтому их можно выбрать C_7^4 способами. Эти способы нужно скомбинировать с C_{13}^5 способами выбрать 5 чёрных шаров из 13. Таким образом, событию A благоприятствуют $C_7^4 \cdot C_{13}^5$ элементарных событий. Тогда

$$\mathrm{P}(A) = \frac{C_7^4 \cdot C_{13}^5}{C_{20}^9}.$$

Обратите внимание: *сумма верхних индексов в числителе равна верхнему индексу в знаменателе*: $4+5=9$. *То же верно для нижних индек-*

сов: $7+13=20$. Это общее правило, которое позволяет проверить, нет ли ошибки в составлении формулы.

С точки зрения методики решение удобно записать в виде таблицы, расположив графы так, чтобы из них естественным образом «собиралась» нужная формула.

	Белых	Чёрных	Всего
Шаров	7	13	$7+13=20$
Выбрано	4	$9-4=5$	9
Число способов	C_7^4	C_{13}^5	C_{20}^9

Часто на занятиях по теории вероятностей предлагают оставить ответ в виде формулы и не вычислять результат до конца. В школе такая практика глубоко ошибочна и даже порочна — числовой ответ важен, ибо он и только он даёт представление о том, насколько событие в действительности вероятно или невероятно.

Если n не очень велико, то числа C_n^k можно найти в *треугольнике Паскаля*. Если так — хорошо. Если нет, то придётся пользоваться формулой $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ или компьютером. Расчёт по формуле с точностью до тысячных даёт

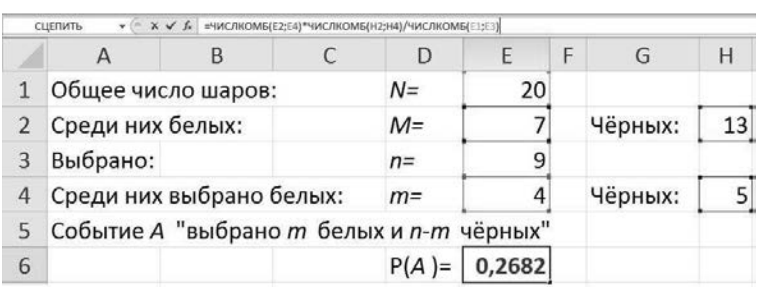
$$\mathrm{P}(A)=\frac{C_7^4\cdot C_{13}^5}{C_{20}^9}=\frac{7!}{4!\cdot 3!}\cdot\frac{13!}{5!\cdot 8!}\cdot\frac{9!\cdot 11!}{20!}\approx 0{,}268.$$

Расчёт облегчается тем, что бо́льшая часть множителей в числителе и знаменателе сокращаются.

С помощью Excel этот результат можно получить разными способами. Например, с помощью функции =ЧИСЛКОМБ(n; k). Нужно составить выражение

$$=\text{ЧИСЛКОМБ}(7;4)*\text{ЧИСЛКОМБ}(13;5)/\text{ЧИСЛКОМБ}(20;9).$$

На рисунке показан пример вычислений.


СЦЕПИТЬ =ЧИСЛКОМБ(E2;E4)*ЧИСЛКОМБ(H2;H4)/ЧИСЛКОМБ(E1;E3)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Общее число шаров:			N=	20			
2	Среди них белых:			M=	7		Чёрных:	13
3	Выбрано:			n=	9			
4	Среди них выбрано белых:			m=	4		Чёрных:	5
5	Событие A "выбрано m белых и n-m чёрных"							
6				P(A)=	0,2682			

Можно сделать вычисления короче, так как в Excel есть специальная функция

$$= \text{ГИПЕРГЕОМЕТ}(\text{выбрано меченых; выбрано; всего меченых; всего}),$$

которая в нашем случае запишется так:

$$= \text{ГИПЕРГЕОМЕТ}(4;\ 9;\ 7;\ 20).$$

Результат, как и следовало ждать, будет таким же:

СЦЕПИТЬ =ГИПЕРГЕОМЕТ(E4;E3;E2;E1)

	A	B	C	D	E
1	Общее число шаров:			*N*=	20
2	Среди них белых:			*M*=	7
3	Выбрано:			*n*=	9
4	Среди них выбрано белых:			*m*=	4
5	Событие *A* "выбрано *m* белых и *n-m* чёрных"				
6				P(*A*)=	0,2682

В общем виде всего объектов N, меченых среди них M, а не меченых $N-M$. Из этой совокупности выбирают n случайных объектов. Вероятность того, что среди выбранных объектов окажется ровно m меченых (и, стало быть, $n-m$ не меченых), равна

$$\mathrm{P}(A) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

Задачи для работы в классе

254. В коробке 9 простых карандашей, из них 4 мягких, остальные твёрдые. Из коробки не глядя забирают 6 карандашей. Найдите вероятность того, что среди взятых карандашей окажется ровно 2 мягких.

Пример решения. Удобно решение записать с помощью таблицы.

	Мягких	Твёрдых	Всего
В коробке	4	$9-4=5$	9
Выбрано	2	$6-2=4$	6
Число способов	$C_4^2=6$	$C_5^4=5$	$C_9^6=84$

Числа сочетаний находим в *треугольнике Паскаля*. События $A = \{$выбрано 2 мягких и 4 твёрдых$\}$ имеет вероятность

$$\mathrm{P}(A) = \frac{C_4^2 \cdot C_5^4}{C_9^6} = \frac{6 \cdot 5}{84} = \frac{5}{14}.$$

255. В пакете 10 воздушных шариков, среди них 3 красных, остальные зелёные. Найдите вероятность того, что из 7 случайно выбранных шариков красными окажутся ровно:

а) 2; б) 3.

256. Симметричную монету бросили 9 раз. Известно, что орёл выпал 6 раз. Найдите вероятность того, что среди первых 5 бросаний случилось ровно:

а) 3 орла; б) 4 орла; в) 2 решки; г) 4 решки.

Указание. Обратите внимание на то, что событие в п. г) невозможное.

257. Игральную кость бросили 8 раз. Известно, что шестёрка выпала трижды. Найдите вероятность того, что в первых 4 бросаниях:

а) не было ни одной шестёрки;

б) была ровно одна шестёрка;

в) случилось две шестёрки;

г) шестёрка выпала трижды.

Указание. Вычисления можно упростить, если использовать равенства $C_n^0 = C_n^n = 1$ и $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$ для любого $n \geqslant 1$. Для самопроверки полезно проверить, равна ли 1 сумма всех четырёх полученных вероятностей.

258. Игральную кость бросили 9 раз. Известно, что шестёрка выпала трижды. Найдите вероятность того, что в первых 5 бросаниях:

а) не было ни одной шестёрки;

б) была ровно одна шестёрка;

в) случилось две шестёрки;

в) шестёрка выпала трижды.

259. В кармане у Сергея 10 монет: 4 двухрублёвые, остальные пятирублёвые. Сергей на ощупь вынимает из кармана 6 монет. Какова вероятность того, что среди оставшихся в кармане монет:

а) окажутся ровно 2 двухрублёвые;

б) не окажется ни одной пятирублёвой?

Указание. Обратите внимание на то, что выбранными в данном случае оказываются те монеты, что остались в кармане, а не те, что вынуты.

260. В коробке 9 фломастеров, из них 4 красных, остальные синие. Из коробки не глядя забирают 5 фломастеров. Найдите вероятность того, что среди взятых фломастеров будет:

а) 2 или 3 красных; б) от 2 до 4 синих.

в) Может ли среди выбранных фломастеров не оказаться синих?

Пример решения. Найдём вероятности событий $A_2 = \{$ровно 2 красных$\}$ и $A_3 = \{$ровно 3 красных$\}$.

	Красных	Синих	Всего
В коробке	4	5	9
Выбрано (A_2)	2	3	5
Число способов	$C_4^2 = 6$	$C_5^3 = 10$	$C_9^5 = 126$
Выбрано (A_3)	3	2	5
Число способов	$C_4^3 = 4$	$C_5^2 = 10$	$C_9^5 = 126$

Вероятность события «от 2 до 3 красных» равна

$$\mathrm{P}(A_2) + \mathrm{P}(A_3) = \frac{C_4^2 C_5^3 + C_4^3 C_5^2}{C_9^5} = \frac{6 \cdot 10 + 4 \cdot 10}{126} = \frac{100}{126} = \frac{50}{63}.$$

Вероятность события «от 2 до 4 синих» можно найти аналогично. Однако заметим, что оно совпадает с событием «от 1 до 3 красных». Значит нужно дополнительно найти вероятность того, что красный будет ровно один:

	Красных	Синих	Всего
В коробке	4	5	9
Выбрано (A_1)	1	4	5
Число способов	$C_4^1 = 4$	$C_5^4 = 5$	$C_9^5 = 126$

Следовательно, вероятность события «от 2 до 4 синих» равна

$$\mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \mathrm{P}(A_3) = \frac{C_4^1 C_5^4}{C_9^5} + \frac{50}{63} = \frac{4 \cdot 5}{126} + \frac{50}{63} = \frac{20}{21}.$$

Напоследок заметим, что хотя бы один синий фломастер обязательно выбран, поскольку если это не так, то красных фломастеров должно быть выбрано 5, а их всего 4.

261. В ящике 8 болтов, из них 3 медных, остальные стальные. Из ящика не глядя забирают 5 болтов. Найдите вероятность того, что среди выбранных болтов окажется:

а) менее 2 медных; б) от 2 до 4 стальных.

в) Какое наименьшее число стальных болтов может оказаться среди выбранных?

262. В пакете 10 леденцов: среди них 3 лимонных, остальные апельсиновые. Случайным образом выбирают 6 леденцов.

а) Какое самое малое количество апельсиновых леденцов может быть выбрано?

б) Найдите вероятность того, что три или четыре из выбранных леденцов окажутся апельсиновыми.

в) Найдите вероятность того, что среди выбранных леденцов апельсиновых будет больше 4.

Указание. Обратите внимание: события в п. б) и в) противоположны.

263. В группе 30 человек: 14 девушек, остальные юноши. Случайным образом выбирают подгруппу из 3 человек. Найдите вероятность того, что в этой подгруппе окажутся 2 девушки и 1 юноша. Результат округлите до тысячных.

Пример решения. Численность группы велика для того, чтобы нужные значения находить в треугольнике Паскаля. Но невелика подгруппа, поэтому вычисления не слишком громоздкие.

	Девушек	Юношей	Всего
В группе	14	16	30
Выбрано	2	1	3
Число способов	$C_{14}^2 = \frac{14 \cdot 13}{2} = 91$	$C_{16}^1 = 16$	$C_{30}^3 = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{6} = 4060$

Нужная вероятность равна

$$\frac{C_{14}^2 \cdot C_{16}^1}{C_{30}^3} = \frac{91 \cdot 16}{4060} \approx 0{,}359.$$

264*. В лотерейном барабане 25 шаров с номерами от 1 до 25. Барабан крутят, и из него выпадают 6 случайных шаров. Какова вероятность того, что среди выпавших номеров будут ровно:

а) 2 однозначных; б) 5 двузначных?

Результаты округлите до тысячных.

265*. В коробке 8 чёрных и 5 белых шаров. Случайным образом достают 7 шаров. Какое событие более вероятно: $A_3 = \{$среди выбранных шаров ровно три чёрных$\}$ или $A_4 = \{$среди выбранных шаров ровно четыре чёрных$\}$.

Пример решения. Составим выражения для вероятностей обоих событий, но не будем их вычислять: $P(A_3)=\dfrac{C_8^3C_5^4}{C_{13}^7}$ и $P(A_4)=\dfrac{C_8^4C_5^3}{C_{13}^7}$.

Чтобы сравнить их, сравним их отношение с единицей:

$$\frac{P(A_3)}{P(A_4)}=\frac{C_8^3C_5^4}{C_{13}^7}:\frac{C_8^4C_5^3}{C_{13}^7}=\frac{C_8^3C_5^4}{C_8^4C_5^3}=\frac{8!\cdot5!\cdot(4!\cdot4!)(3!\cdot2!)}{(3!\cdot5!)(4!\cdot1!)\cdot8!\cdot5!}=\frac{4\cdot2}{5\cdot4}=\frac{2}{5}<1.$$

Следовательно, 4 чёрных шара более вероятны.

266*. В ящике 30 деталей, но известно, что пять из них со скрытым дефектом. Из ящика случайным образом достают 8 деталей. Что более вероятно: что среди выбранных деталей ровно 3 дефектные или ровно 2 дефектные?

267*. В пакете воздушные шарики: 3 красных, 3 зелёных и 4 синих. Найдите вероятность того, что среди 6 случайно выбранных шариков окажутся ровно 1 красный, 2 зелёных и 3 синих.

Пример решения. Принцип решения не меняется, несмотря на то, что объекты не двух, а трёх типов. Можно составить знакомую нам таблицу, добавив ещё один тип.

	Красных	Зелёных	Синих	Всего
Шариков всего	3	3	4	10
Выбрано	1	2	3	6
Число способов	$C_3^1=3$	$C_3^2=3$	$C_4^3=4$	$C_{10}^6=210$

Искомая вероятность равна

$$\frac{C_3^1C_3^2C_4^3}{C_{10}^6}=\frac{3\cdot3\cdot4}{210}=\frac{6}{35}.$$

268*. В коробке 9 цветных карандашей: 2 красных, 4 зелёных и 3 жёлтых. Из коробки наудачу достают 5 карандашей. Найдите вероятность того, что среди них оказалось:

а) ровно 3 зелёных и по 1 карандашу двух других цветов.

б) ровно 1 красный и 2 зелёных.

269*. В билете популярной некогда лотереи «5 из 36» всего 36 номеров — от 1 до 36. Участник лотереи выбирает и зачёркивает в билете любые 5 из них — на свой вкус. Потом проводится тираж лотереи — случайным образом выпадают 5 выигрышных номеров. Если участник угадал хотя бы 3 выигрышных номера, то он получает денежный выигрыш. Чем больше номеров угадано, тем выигрыш больше. Найдите вероятность того, что участник угадает:

а) все 5 номеров (округлите до 7 знаков после запятой);

б) ровно 3 номера из 5 (округлите до тысячных);

в) хотя бы 3 номера (округлите до тысячных).

Вычисления проведите с помощью калькулятора или компьютера (например, Excel). Охарактеризуйте степень правдоподобности каждого из этих событий.

Пример решения. Всего номеров 36. Выигрышных 5. Выбрано 5. Опустим составление таблиц. Сразу напишем вероятности. Событие $A_5 = \{$угадал все пять номеров$\}$ имеет вероятность

$$\mathrm{P}(A_5) = \frac{C_5^5 C_{31}^0}{C_{36}^5} = \frac{1}{C_{36}^5} = \frac{1}{376\,992} \approx 0{,}0000027.$$

Аналогично

$$\mathrm{P}(A_3) = \frac{C_5^3 C_{31}^2}{C_{36}^5} = \frac{10 \cdot 465}{376\,992} \approx 0{,}012$$

и

$$\mathrm{P}(A_{\geqslant 3}) = \mathrm{P}(A_3) + \mathrm{P}(A_4) + \mathrm{P}(A_5) = \frac{C_5^3 C_{31}^2 + C_5^4 C_{31}^1 + C_5^5 C_{31}^0}{C_{36}^5} = \frac{10 \cdot 465 + 5 \cdot 31 + 1}{376\,992} \approx 0{,}013.$$

270*. В билете лотереи «6 из 49» всего 49 номеров — от 1 до 49. Участник лотереи выбирает и зачёркивает в купленном билете любые 6 чисел — на свой вкус. Потом проводится тираж лотереи: случайным образом выпадают 6 выигрышных номеров. Если участник угадал хотя бы 3 выигрышных номера, то он получает денежный выигрыш. Чем больше номеров угадано, тем выигрыш больше. Найдите вероятность того, что участник:

а) получит максимальный выигрыш (угадает все 6 номеров);

б) получит минимальный выигрыш (угадает ровно 3 номера);

в) получит хотя бы какой-нибудь выигрыш.

Вычисления проведите с помощью калькулятора или компьютера (например, Excel). Результаты округлите так, чтобы был понятен порядок числа, но хотя бы до тысячных. Охарактеризуйте степень правдоподобности каждого из этих событий.

Задания для домашней работы

271. В коробке 8 простых карандашей, из них 3 мягких, остальные твёрдые. Из коробки не глядя забирают 5 карандашей. Найдите вероятность того, что среди выбранных карандашей окажется:

а) ровно 2 мягких; б) ровно 4 твёрдых.

272. Монету подбрасывают 9 раз. Известно, что всего выпало 3 орла. Найдите вероятность того, что:

а) среди 4 первых бросков случилось 2 решки;

б) среди последних 7 бросков случился только 1 орёл.

в) Какое наименьшее число решек могло выпасть в 6 первых бросках.

273. Стрелок стрелял восемь раз по восьми мишеням. Поразил он 5 мишеней. Какова вероятность того, что из первых 5 выстрелов:

а) случилось ровно 2 промаха;

б) попаданий оказалось ровно 3;

в) попаданий оказалось больше 3?

274. В отделе 10 сотрудников. В прошлом году 4 из них принимали участие в опросе по поводу удовлетворённости условиями работы. В этом году проводится новый опрос. Для него из сотрудников отдела случайным образом снова отобрали 4 человека. Какова вероятность того, что в новый опрос из участников прошлогоднего опроса:

а) попали ровно 2 человека;

б) попал хотя бы один;

в) не попал никто?

275. В лотерее разыгрываются номера от 1 до 30. Из них случайным образом выбираются 6 выигрышных номеров. Найдите вероятность того, что среди них:

а) ровно 3 номера окажутся чётными;

б) ровно 2 номера будут делиться на 5.

При расчёте используйте калькулятор или компьютер. Результаты округлите до тысячных.

276*. В серии из 18 одинаковых и независимых испытаний Бернулли наступило 11 успехов. Что более вероятно:

а) ровно 4 или ровно 5 успехов в 9 первых испытаниях;

б) ровно 5 или ровно 6 успехов в 9 первых испытаниях;

в) ровно 6 или ровно 7 успехов в 9 первых испытаниях?

277*. В кармане у Петра пять монет по 10 рублей, 3 двухрублёвые монеты и 2 монеты по 5 рублей. Пётр не глядя достаёт из кармана 6 случайно выбранных монет. Какова вероятность того, что среди них окажутся:

а) ровно 3 монеты по 10 рублей;

б) ровно 2 монеты по 10 рублей, 2 монеты по 2 рубля и 2 монеты по 5 рублей?

Раздел III

Случайные величины

§ 9. Дискретная случайная величина. Распределение вероятностей

Пояснение. Вычисления вероятностей отдельных событий не исчерпывает круг важных вопросов даже на уровне основной школы. Поскольку наша задача — развитие статистического мышления, осознанного отношения к массовым явлениям, одной из целей обучения следует полагать знакомство с законом больших чисел. Закон больших чисел объясняет статистическую устойчивость во многих случайных экспериментах. В частности, он объясняет, почему подсчёт вероятностей имеет смысл при прогнозировании и почему вероятность можно измерять с помощью выборочных исследований.

Более глубокое знакомство со случайными величинами следует отнести к старшей школе, а в 9 классе следует заняться лишь подготовительной работой: первичным знакомством с распределениями и важными характеристиками случайных величин. Три параграфа этого раздела содержат достаточное количество задач для развития навыков, которые впоследствии могут лечь в основу более глубокого изучения.

Важно сформировать представление о числовой случайной величине как о величине, которая под воздействием случайных обстоятельств может принимать разные значения.

В основу методики мы положили индуктивный подход — большая часть случайных величин, использующихся в задачах, возникает из уже изученных экспериментов.

Дискретную случайную величину часто можно задать таблицей распределения. Например, таблица распределения случайной величины $X = \{$число очков, выпавшее при бросании игральной кости$\}$ выглядит так:

Значения x_i	1	2	3	4	5	6
Вероятности p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Значения обычно записываются по возрастанию. Сумма вероятностей во второй строке должна равняться 1.

Вместо такой таблицы мы будем записывать распределение двумя строками в скобках. Знак $\sim$ будем использовать как знак принадлежности случайной величины распределению. Предыдущий пример будет записан так:

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Эту запись можно прочесть следующим образом: «Случайная величина X распределена по следующему закону» или «Случайная величина X принадлежит распределению». Обращаем внимание на недопустимость использования знака равенства: случайная величина и распределение — это не одно и то же. Одному и тому же распределению могут принадлежать разные случайные величины. Простой пример: в эксперименте с двукратным бросанием игральной кости возникает множество случайных величин. Одна из них — число очков X, выпавшее в первый раз, а другая — число очков Y, выпавшее во второй раз. Очевидно, X и Y — две разные случайные величины, которые могут совпасть лишь случайно (если дважды выпало одно и то же). Но обе они принадлежат одному и тому же распределению. Мы говорим, что эти разные случайные величины одинаково распределены или распределены по одному и тому же закону.

Значительное внимание мы уделяем *бинарной случайной величине*, принимающей всего два значения 0 и 1 и связанной с некоторым событием A:

$$I = \begin{cases} 1, & \text{если событие } A \text{ наступило,} \\ 0, & \text{если событие } A \text{ не наступило (наступило } \bar{A}\text{).} \end{cases}$$

Если вероятность события A равна p, то случайная величина I имеет распределение

$$I \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}, \quad \text{где } q = 1 - p.$$

Такие величины широко применяются при решении задач (см. § 10 и 11).

Задачи для работы в классе

278. Является ли, по вашему мнению, случайной величина:

а) количество дней в случайно выбранном месяце года;

б) количество дней в ноябре;

в) ваша будущая годовая отметка по математике;

г) число автомобилей в городе Тюмени 13 мая 2025 г. в 13:00?

Обсуждение. Очень трудно отличить случайную величину от неслучайной, но неизвестной. Например, дано уравнение. Его корни — случайные числа или просто неизвестные? Прошлогодняя отметка Иванова по математике Иванову известна, а нам нет. Для него эта величина не случайная, а для нас?

Важно! Случайная величина возникает тогда, когда есть случайный эксперимент и в этом эксперименте случайным событиям сопоставлены некоторые числовые значения.

Приведённые в задаче 278 примеры подобраны тщательно. Поскольку месяц выбирается случайно, число дней в нём тоже случайное: от 28 до 31 с разными вероятностями. Количество дней в ноябре неслучайное. Их 30. Разумеется, можно и эту величину считать случайной с единственным значением 30 и вероятностью этого значения 1.

По всем этим причинам такая задача здесь одна, и вряд ли следует предлагать подобные задачи в качестве домашнего задания или включать в какую-либо контрольную работу.

279. Дано распределение случайной величины X:

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 & 7 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}4 & p \end{pmatrix}.$$

а) Сколько значений принимает эта случайная величина?

б) Найдите неизвестную вероятность p.

Пример решения. Значений четыре, а неизвестную вероятность можно найти, зная, что сумма вероятностей равна единице:

$$0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}4 + p = 1, \quad \text{откуда} \quad p = 0{,}2.$$

280. Дано распределение случайной величины Y:

$$Y \sim \begin{pmatrix} 3{,}1 & 3{,}3 & 5{,}6 & 7{,}1 & 8{,}9 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & m & 0{,}2 & 0{,}15 \end{pmatrix}.$$

а) Сколько значений принимает эта случайная величина?

б) Найдите неизвестную вероятность m.

281. Игральную кость бросают один раз.

а) Какие значения может принимать случайная величина $X =$ $=$ {число выпавших очков}?

б) Запишите распределение случайной величины X.

Пример решения. Значения — натуральные числа от 1 до 6. Вероятность каждого значения $\frac{1}{6}$.

282. На шоссе установлен датчик, считающий проезжающие автомобили. Какие значения принимает случайная величина «число автомобилей, проехавших в течение часа»?

Указание. Разумеется, число машин, проехавших в течение часа, ограничено пропускной способностью дороги. Но никто не знает эту точную границу. Поэтому удобно считать, что ответ: 0, 1, 2 и все последующие натуральные числа. Просто у слишком больших значений окажутся нулевые вероятности.

283. Монету бросают до тех пор, пока не выпадет орёл. Какие значения может принимать случайная величина:

а) $Y =$ {число бросков};

б) $F =$ {количество выпавших решек}?

в) Выразите величину F через величину Y.

284. Монету бросают 5 раз. Какие значения может принимать случайная величина:

а) $S =$ {число выпавших орлов};

б) $Q =$ {число выпавших решек}?

в) Выразите величину Q через величину S.

285. Миша задумывает случайное натуральное однозначное число, а Маша прибавляет к нему число 8.

а) Какие значения принимает случайная величина $X =$ {число, задуманное Мишей}?

б) Какие значения принимает случайная величина $Y =$ {число, полученное Машей}?

в) Выразите Y через X.

286. Игральную кость бросают дважды. Пусть на первой кости выпадает число X, а на второй — число Y.

а) Найдите вероятность события $X = 4$.

б) Найдите вероятность события $Y = 6$.

в) Найдите вероятность события $X = 3$, $Y = 2$.

Пример решения. Событие $X = 4$ состоит в том, что на первой кости выпало 4 очка. Вероятность этого $\frac{1}{6}$. То же верно для события

$Y=6$. Записываем

$$\mathrm{P}(X=4)=\frac{1}{6}, \quad \mathrm{P}(Y=6)=\frac{1}{6}.$$

Обратите внимание: знак равенства в скобках выражает событие. Знак равенства вне скобок — это равенство вероятностей. Событие $X=3$, $Y=2$ состоит в том, что на первой кости выпало 3, а на второй 2 очка. Вероятность этого $\mathrm{P}(X=3; Y=2)=\frac{1}{36}$ (один из 36 равновозможных исходов эксперимента — см. задачу 19).

287. Игральную кость бросают дважды. Пусть на первой кости выпадает число X, а на второй — число Y.

а) Какие значения принимает случайная величина $S=\{$сумма выпавших очков$\}$?

б) Выразите случайную величину S через X и Y.

в) Найдите вероятность события $S=4$.

Указание. Чтобы найти вероятность события $S=4$, можно воспользоваться таблицей эксперимента (см. задачи 24 и 33 (а)).

288. Игральную кость бросают дважды. Случайная величина $S=\{$сумма выпавших очков$\}$. Найдите вероятность события:

а) $S=7$; б) $S\leqslant 5$.

289. Составьте распределение случайной величины $S=\{$число выпавших орлов$\}$ в опыте, где симметричную монету бросают:

а) 2 раза; б) 3 раза; в) 4 раза.

Указание. См. задачи 211, 212 и 213.

290. Бросают одну игральную кость. Случайная величина I устроена таким образом: если на кости выпала шестёрка, то $I=1$, в противном случае $I=0$. Составьте распределение случайной величины I.

Пример решения. Случайную величину I можно записать с помощью фигурной скобки:

$$I=\begin{cases} 1, & \text{если выпала шестёрка,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Вероятность шестёрки равна $\frac{1}{6}$, вероятность не шестёрки равна $\frac{5}{6}$. Поэтому

$$I \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}.$$

291. Бросают одну монету. Случайная величина I задана равенством

$$I = \begin{cases} 1, & \text{если выпал орёл,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Составьте распределение случайной величины I.

292. Бросают одну игральную кость. Случайная величина I задана равенством

$$I = \begin{cases} 1, & \text{если выпало больше двух очков,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Составьте распределение случайной величины I.

293. Производится одно испытание с вероятностью успеха p и вероятностью неудачи $q = 1 - p$. Случайная величина I задана равенством

$$I = \begin{cases} 1, & \text{если наступил успех,} \\ 0, & \text{если наступила неудача.} \end{cases}$$

Составьте распределение случайной величины I.

294. На соревнования приехали 18 гимнастов, среди них Иванов. Порядок выступления определяется жеребьёвкой. Случайная величина I задана равенством

$$I = \begin{cases} 1, & \text{если Иванов выступает пятым по счёту,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Составьте распределение случайной величины I.

295. На конкурс приехали 24 певицы, среди них Аделаида. Порядок выступления конкурсантов определяется жеребьёвкой. Случайная величина I задана равенством

$$I = \begin{cases} 1, & \text{если произошло событие } A, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Составьте распределение случайной величины I, если:

а) $A = \{$Аделаида выступает седьмой по счёту$\}$;

б) $A = \{$Аделаида выступает либо третьей, либо последней$\}$;

в) $A = \{$порядковый номер выступления Аделаиды от 3-го до 8-го включительно$\}$;

г) $A = \{$Аделаида выступает позже, чем Кассандра, но раньше, чем Евлампия (тоже участницы)$\}$.

296. Симметричную монету бросают до тех пор, пока орёл не выпадет первый раз. Составьте распределение случайной величины

$$I = \begin{cases} 1, & \text{если при втором броске выпала решка,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пример решения. Второй бросок состоится, если первый бросок дал решку. Значит, $I = 1$, только если первые два броска окончились решкой. Вероятность этого $0{,}5^2 = 0{,}25$. Получаем распределение:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}75 & 0{,}25 \end{pmatrix}.$$

297. Симметричную монету бросают до тех пор, пока орёл не выпадет первый раз. Составьте распределение случайной величины

$$I = \begin{cases} 1, & \text{если произошло событие } A, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Событие A:

а) «при третьем броске случилась решка»;

б) «при восьмом броске случилась решка»;

в) «при k-м броске случилась решка».

298. Стрелок стреляет по мишени до тех пор, пока не поразит её. Вероятность поражения мишени при каждом отдельном выстреле равна p, а вероятность промаха равна $q = 1 - p$. Составьте распределение случайной величины

$$I = \begin{cases} 1, & \text{если произошло событие } A, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Событие A:

а) «при втором выстреле случился промах»;

б) «при четвёртом выстреле случился промах»;

в) «при k-м выстреле промах».

299. Дана случайная величина

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Составьте распределение случайной величины $Y = 2X + 1$.

Пример решения. Значения меняются по указанной формуле, а вероятности остаются прежними.

300. Дана случайная величина

$$X \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 5 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Составьте распределение случайной величины:

а) $Y = X + 6$; б) $Z = 5 - X$; в) $V = 5X - 3$; г) $W = 2 - 4X$.

Указание. Обратите внимание на то, что в п. б) и г) после вычисления значений их следует упорядочить по возрастанию (разумеется, вместе с их вероятностями).

301. В коробке 4 красных фломастера и 3 синих. Из коробки достают 5 случайных фломастеров. Составьте распределение случайной величины ={число красных фломастеров среди выбранных}.

Пример решения. Вероятности событий $X = k$ мы умеем находить (см. § 8). Очевидно, событие $X = 5$ невозможно. Невозможны также события $X = 0$ и $X = 1$, поскольку если красных фломастеров взяли меньше 2, то синих должно быть выбрано больше 3, чего не может быть. Остальные вероятности можно найти:

$$P(X = 2) = \frac{C_4^2 C_3^3}{C_7^5} = \frac{6 \cdot 1}{21} = \frac{2}{7}, \quad P(X = 3) = \frac{C_4^3 C_3^2}{C_7^5} = \frac{4 \cdot 3}{21} = \frac{4}{7},$$

$$P(X = 4) = \frac{C_4^4 C_3^1}{C_7^5} = \frac{1 \cdot 3}{21} = \frac{1}{7}.$$

Получаем распределение:

$$X \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ \frac{2}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

302. В ящике 10 деталей, но 2 из них имеют дефект. Из ящика случайным образом выбирают 7 деталей. Составьте распределение случайной величины X = {число дефектных деталей среди выбранных}.

303. Страховая компания в некотором регионе страхует сельские дома. Цена годового страхового полиса равна 5000 рублей. Исследования показали, что в течение года в среднем 1 % застрахованных домов подвергается небольшому ущербу (например, упавшее дерево или протекание крыши), и средняя сумма страховой выплаты при этом равна 120 тыс. рублей. В среднем 0,01 % страхователей несёт серьёзный ущерб (пожар, обрушение дома), и средняя сумма выплаты при этом 2 млн рублей. Составьте распределение случайной величины «средний доход страховой компании от продажи одного полиса».

Пример решения. Доход равен разности между ценой полиса и выплатой. В случае отсутствия происшествий доход равен 5000 рублей. Если ущерб небольшой, доход равен

$$5\,000-120\,000=-115\,000 \text{ рублей.}$$

Если ущерб серьёзный, то доход равен

$$5\,000-2\,000\,000=-1\,995\,000 \text{ рублей.}$$

Вероятности этих значений известны. Получаем распределение:

$$\begin{pmatrix} -1\,995\,000 & -115\,000 & 5\,000 \\ 0{,}0001 & 0{,}01 & 0{,}9899 \end{pmatrix}.$$

304. Страховая компания в некотором регионе страхует владельцев автомобилей. Цена годового страхового полиса равна 30 000 рублей. Исследования показали, что в течение года владелец автомобиля попадает в мелкую аварию с вероятностью 0,11 и средняя сумма страховой выплаты при этом равна 50 000 рублей. С вероятностью 0,03 автомобилист попадает в серьёзную аварию, и средняя сумма выплаты при этом 630 000 рублей. Составьте распределение случайной величины «средний доход страховой компании от продажи одного полиса».

305. Дана случайная величина

$$X\sim\begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 & 7 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Составьте распределение случайной величины $Y=X^2$.

Пример решения. Значения меняются по указанной формуле, а вероятности остаются прежними. Получаем $X\sim\begin{pmatrix} \underline{9} & 1 & \underline{9} & 49 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

Значение 9 встречается дважды (оно подчёркнуто). Его нужно записать один раз, сложив соответствующие вероятности. Это действие напоминает приведение подобных слагаемых:

$$X\sim\begin{pmatrix} 1 & 9 & 49 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{4}+\frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 9 & 49 \\ \frac{1}{6} & \frac{7}{12} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

306. Составьте распределение случайной величины X^2, если:

а) $X \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ \frac{2}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$; б) $X \sim \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 & 4 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$;

в) $X \sim \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 & 4 & 5 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix}$.

307. Дана случайная величина I, распределённая по закону

$$I \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}.$$

Докажите, что $I^2 = I$.

308*. Игральную кость бросают дважды. Составьте распределение случайной величины $S = \{$сумма выпавших очков$\}$.

Пример решения. Воспользуемся таблицей эксперимента.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

В таблице видно, сколько элементарных событий благоприятствует каждой сумме. Легко найти вероятность каждой суммы. Сначала вероятности растут (до $S = 7$), а потом убывают. Получается

$$P(S=2) = \frac{1}{36}, \quad P(S=3) = \frac{2}{36}, \ \ldots$$

$$P(S=7) = \frac{6}{36}, \quad P(S=8) = \frac{5}{36}, \ \ldots, \ P(S=12) = \frac{1}{36};$$

$$S \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}.$$

Дроби можно не сокращать, чтобы лучше видеть закономерность.

309*. В соответствии с условием задачи 269 билет лотереи «5 из 36» стоит 50 рублей. В билете 36 номеров — от 1 до 36. Участник лотереи выбирает и зачёркивает в билете любые 5 из них — на свой вкус. Потом проводится тираж лотереи: случайным образом выпадают 5 выигрышных номеров. Выигрыш зависит от числа угаданных номеров.

Угаданных номеров	3	4	5
Выигрыш	50 рублей	5 тыс. рублей	2 млн рублей

Составьте распределение случайной величины:

а) $X = \{$выигрыш участника на один билет$\}$;

б) $Y = \{$доход устроителей лотереи от продажи одного билета$\}$.

Вычисления проведите с помощью компьютера или калькулятора с точностью 6 знаков после запятой.

Пример решения. Добавим в таблицу вероятности значений случайной величины «число угаданных номеров» (см. задачу 269).

Угаданных номеров	3	4	5
Выигрыш	50 рублей	5 000 рублей	2 000 000 рублей
Вероятность	$\dfrac{C_5^3 C_{31}^2}{C_{36}^5} \approx 0{,}012334$	$\dfrac{C_5^4 C_{31}^1}{C_{36}^5} \approx 0{,}000411$	$\dfrac{C_5^5 C_{31}^0}{C_{36}^5} \approx 0{,}000003$

Вероятность того, что угадано меньше трёх номеров, равна

$$1 - 0{,}012334 - 0{,}000411 - 0{,}000003 = 0{,}987252.$$

Тогда

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 50 & 5\,000 & 2\,000\,000 \\ 0{,}987252 & 0{,}012334 & 0{,}000411 & 0{,}000003 \end{pmatrix}.$$

Распределение Y найдём из условия $Y = 50 - X$:

$$Y \sim \begin{pmatrix} -1\,999\,950 & -4\,950 & 0 & 50 \\ 0{,}000003 & 0{,}000411 & 0{,}012334 & 0{,}987252 \end{pmatrix}$$

310*. Билет некоторой лотереи «6 из 49» стоит 50 рублей. В билете 49 номеров — от 1 до 49. Участник лотереи выбирает и зачёркивает на свой вкус любые 6 из них. Потом проводится тираж: из барабана выпадают 6 случайных выигрышных номеров. Выигрыш игрока зависит от числа номеров, которые он угадал (см. таблицу).

Угаданных номеров	4	5	6
Выигрыш	50 рублей	500 тыс. рублей	200 млн рублей

Составьте распределение случайной величины «доход устроителей лотереи от продажи одного билета». Вычисления проведите с помощью компьютера или калькулятора с точностью 8 знаков после запятой.

Задания для домашней работы

311. Дано распределение случайной величины:

$$Z \sim \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 & x & 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

а) Сколько значений принимает эта случайная величина?

б) Найдите неизвестную вероятность x.

312. Составьте распределение случайной величины $S = \{$число выпавших решек$\}$ в опыте, где симметричную монету бросают:

а) два раза; б) три раза; в) четыре раза.

313. Стрелок стреляет в тире до первого промаха. Какие значения принимает случайная величина:

а) $X = \{$число выстрелов$\}$;

б) $Y = \{$число попаданий$\}$?

в) Выразите X через Y.

314. Сборная команда России играет на групповом этапе чемпионата мира 7 матчей со сборными других стран. По условиям этапа ничьи невозможны. Какие значения может принимать случайная величина:

а) $S = \{$число выигрышей сборной России$\}$;

б) $Q = \{$число проигрышей сборной России$\}$?

в) Выразите величину Q через величину S.

315. У Коли есть коллекция иностранных монет — всего 20 штук. Каждая монета лежит в своём подписанном кармашке в специальном альбоме (кляссере). Однажды Колин младший брат достал все монеты поиграть, а потом услышал, что Коля пришёл из школы, испугался и быстро распихал все монеты по кармашкам как попало. Какие значения может принимать случайная величина «число монет, оказавшихся в своём кармашке»?

316. Борис называет случайное натуральное двузначное число, а Глеб вычитает из него число 12.

а) Какие значения принимает случайная величина $X = \{$число, задуманное Борисом$\}$?

б) Какие значения принимает случайная величина $Y=\{$число, полученное Глебом$\}$?

в) Выразите X через Y.

317. Игральную кость бросают дважды. Пусть случайная величина $S=\{$сумма очков$\}$. Найдите вероятность события:

а) $S=6$; б) $S>8$.

318. Симметричную монету подбрасывают до тех пор, пока не случится решка. Случайная величина I задана равенством

$$I=\begin{cases}1, & \text{если произошло событие } A,\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Составьте распределение случайной величины I, если:

а) $A=\{$сделан ровно 1 бросок$\}$;

б) $A=\{$сделано ровно 3 броска$\}$;

в) $A=\{$число сделанных бросков меньше 3$\}$.

319. Дана случайная величина

$$X\sim\begin{pmatrix}-4 & 0 & 3 & 4\\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}1\end{pmatrix}.$$

Составьте распределение случайной величины:

а) $Y=X-4$; б) $Z=7-X$; в) $V=3-4X$.

320. Страховая компания в некотором регионе страхует автовладельцев от ущерба и угона автомобилей. Цена годового страхового полиса равна 15 000 рублей. По результатам исследований составлена таблица средних выплат в трёх случаях: небольшой ущерб, серьёзный ущерб и угон.

Страховой случай	Небольшой ущерб	Серьёзный ущерб	Угон
Средняя частота	9 %	1 %	0,1 %
Средняя выплата	50 тыс. рублей	350 тыс. рублей	900 тыс. рублей

Составьте распределение случайной величины «доход компании от продажи одного полиса».

321. Составьте распределение случайной величины $Y=X^2$, если:

а) $X\sim\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4\end{pmatrix}$; б) $X\sim\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1 & 2\\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4\end{pmatrix}$;

в) $X\sim\begin{pmatrix}-3 & -1 & 1 & 3\\ 0{,}4 & 0{,}05 & 0{,}25 & 0{,}3\end{pmatrix}$.

§ 10. Математическое ожидание случайной величины

Пояснение. *Математическое ожидание* случайной величины — теоретическое среднее значение этой величины. Это аналог среднего арифметического наблюдений, поэтому важно подчёркивать родственность этих понятий. На уроках рекомендуется иногда вместо словосочетания «математическое ожидание» употреблять менее формальные «среднее значение» или просто «среднее».

Если дискретная случайная величина задана распределением

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n \end{pmatrix},$$

то математическое ожидание[1] существует и равно

$$\mathrm{E}X = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \ldots + x_np_n.$$

Если значений бесконечно много, то математическое ожидание может не существовать — ниже мы приводим две задачи, связанные с такой ситуацией.

При решении задач используются свойства случайных величин.

1°. Если случайная величина X имеет математическое ожидание, то для любых чисел a и b выполняется равенство $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}X+b$, в частности, математическое ожидание константы равно ей самой: $\mathrm{E}b=b$.

2°. Если случайные величины X и Y имеют математические ожидания, то случайная величина $X+Y$ также имеет математическое ожидание, при этом

$$\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}X + \mathrm{E}Y.$$

Это свойство верно не только для двух, но и для произвольного числа независимых случайных величин.

3°. Если две *независимые* случайные величины X и Y имеют математические ожидания, то случайная величина XY также имеет математическое ожидание, при этом

$$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}X \cdot \mathrm{E}Y.$$

[1] В записи математического ожидания $\mathrm{E}X$ обычно X в скобки не берут. Мы не различаем записи $\mathrm{E}X$ и $\mathrm{E}(X)$. То же касается $\mathrm{E}X^2$. Если запись сложнее, то скобки ставят: $\mathrm{E}(2X)$ или $\mathrm{E}(X+Y)$.

Обратите внимание: свойство 3° верно для независимых случайных величин, а свойство 2° верно для любых двух.

Важный частный случай — бинарная случайная величина, связанная с событием A:

$$I = \begin{cases} 1, & \text{если событие } A \text{ наступило,} \\ 0, & \text{если событие } A \text{ не наступило (наступило } \bar{A}\text{).} \end{cases}$$

Если вероятность события A равна p, то случайная величина I имеет распределение

$$I \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}, \quad \text{где } q = 1 - p.$$

Математическое ожидание равно

$$\mathrm{E}I = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p.$$

Это равенство связывает математическое ожидание с вероятностью события и позволяет искать математические ожидания случайных величин даже тогда, когда нам неизвестны их распределения (см., например, задачи 335—343, 346—348).

Задачи для работы в классе

322. Случайная величина X задана распределением. Найдите $\mathrm{E}X$.

а) $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 & 7 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix}$; б) $X \sim \begin{pmatrix} -4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

323. Найдите математическое ожидание случайной величины, заданной распределением:

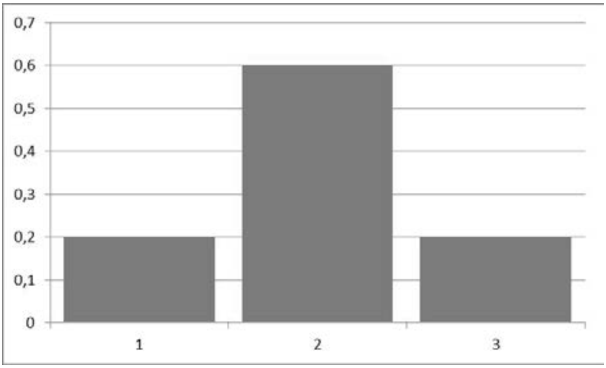
а) $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}$; б) $Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$;

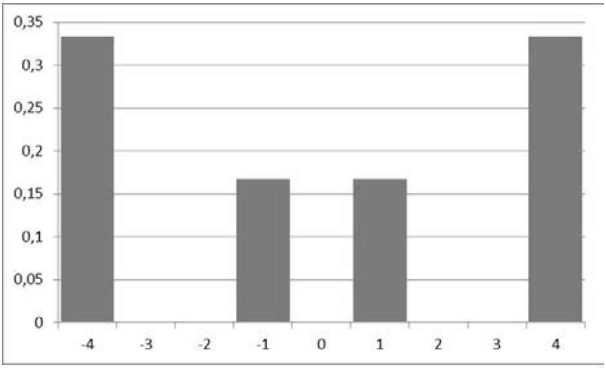
в) $Z \sim \begin{pmatrix} -12 & 0 & 12 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 \end{pmatrix}$.

324. Найдите математическое ожидание случайной величины, заданной распределением:

а) $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 \end{pmatrix}$; б) $Y \sim \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 & 4 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Пример решения. Ничто не мешает вычислить эти математические ожидания по определению. Однако заметим, что распределения симметричны, т. е. значения образуют симметричное множество, и вероятности симметричных значений равны. Диаграмма симметричного распределения — симметричная фигура. На рисунке показаны диаграммы обоих распределений из условия.





Диаграммы симметричных распределений

Математическое ожидание симметричных распределений находится точно в точке симметрии, т. е. равно серединному значению (или среднему двух серединных). В п. а) имеем $\mathrm{E}X=2$, а в п. б) имеем $\mathrm{E}Y=\dfrac{-1+1}{2}=0$.

325. Пользуясь симметричностью распределений, найдите математическое ожидание случайной величины:

а) $X\sim\begin{pmatrix}-3 & -2 & -1 & 0 & 1\\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1\end{pmatrix}$; б) $Y\sim\begin{pmatrix}-6 & -3 & 0 & 3\\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}1\end{pmatrix}$.

326. Математическое ожидание случайной величины X равно 4. Найдите математическое ожидание случайной величины:

а) $Y=2X$; б) $Z=-4X$; в) $U=X-4$; г) $W=5X-3$.

327. Дана случайная величина X, и известно, что её математическое ожидание равно -3. Найдите математическое ожидание случайной величины:

а) $Y=-2X$; б) $Z=5X$; в) $U=X+7$; г) $W=-3X+4$.

328. Дана случайная величина X, и известно, что $\mathrm{E}X=5$. Найдите математическое ожидание случайной величины:

а) $Y=\frac{X}{3}$; б) $Z=\frac{2}{5}X-1$; в) $U=\frac{1}{4}X+2$; г) $W=\frac{7-5X}{3}$.

329. Даны случайные величины X и Y и их математические ожидания: $\mathrm{E}X=-3$, $\mathrm{E}Y=2$. Найдите математическое ожидание случайной величины:

а) $Z=X+Y$; б) $W=Y-X$; в) $U=3X-2Y$; г) $Q=\frac{1}{3}X-\frac{1}{2}Y$.

330. Дана случайная величина

$$X \sim \begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 & 7 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Найдите математическое ожидание случайной величины X^2.

Пример решения. Найдём распределение величины X^2:

$$X \sim \begin{pmatrix} 9 & 1 & 9 & 49 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти $\mathrm{E}X^2$, распределение можно не упрощать:

$$\mathrm{E}X^2 = 9\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{6}+9\cdot\frac{1}{4}+49\cdot\frac{1}{4} = \frac{53}{3}.$$

331. Найдите математическое ожидание случайной величины X^2, если

а) $X \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ \frac{2}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$; б) $X \sim \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 & 4 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$;

в) $X \sim \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 & 4 & 5 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix}$.

332. Случайная величина X задана распределением

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & \ldots & 2^k & \ldots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \ldots & \frac{1}{2^{k+1}} & \ldots \end{pmatrix}.$$

Существует ли математическое ожидание случайной величины X? Если нет — докажите, если есть — найдите его.

Пример решения. Во-первых, нужно убедиться, что такая бесконечная таблица действительно является таблицей распределения: сумма вероятностей должна равняться единице. Числа в нижней строке образуют геометрическую прогрессию. Сложим их:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1.$$

Действительно, перед нами распределение.

Если математическое ожидание существует, то оно должно равняться

$$1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}+\ldots+2^k\cdot\frac{1}{2^{k+1}}+\ldots=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}+\ldots$$

Слагаемых бесконечно много, и каждое из них равно $\frac{1}{2}$. Сумма не существует, следовательно, математического ожидания нет.

333. Случайная величина X задана распределением

$$X\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & \ldots & 2^k & \ldots \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{9} & \frac{2}{27} & \frac{2}{81} & \ldots & \frac{2}{3^{k+1}} & \ldots \end{pmatrix}.$$

Существует ли математическое ожидание случайной величины X? Если нет — докажите, если есть — найдите его.

334. Даны случайные величины X и Y и их математические ожидания: $\mathrm{E}X=0{,}5$, $\mathrm{E}Y=-0{,}6$. Найдите математическое ожидание случайной величины:

а) $Z=X+Y$; б) $W=2Y-X$; в) $U=5X+3Y$; г) $Q=\frac{1}{5}X-\frac{1}{6}Y$.

335. Симметричную монету бросают два раза. Случайные величины I_1 и I_2 заданы следующим образом:

$$I_1=\begin{cases}1, & \text{если в первый раз выпал орёл,}\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

$$I_2=\begin{cases}1, & \text{если во второй раз выпал орёл,}\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

а) Составьте распределения этих величин.

б) Найдите математические ожидания этих величин.

в) Выразите через I_1 и I_2 случайную величину $S=\{$число орлов, выпавших при двух бросаниях$\}$.

г) Найдите математическое ожидание случайной величины S.

Пример решения. Величины I_1 и I_2 имеют одинаковые распределения

$$I_1, I_2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Их математическое ожидания также одинаковы:

$$\mathrm{E}I_1 = \mathrm{E}I_2 = 0 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}5 = 0{,}5.$$

Число выпавших орлов складывается из числа орлов, выпавших в первый раз (их I_1), и числа орлов, выпавших во второй раз (их I_2), т. е. $S = I_1 + I_2$. Поэтому $\mathrm{E}S = \mathrm{E}I_1 + \mathrm{E}I_2 = 0{,}5 + 0{,}5 = 1$.

336. Симметричную монету бросают три раза. Найдите математическое ожидание случайной величины $S = \{$число выпавших орлов$\}$.

337. Найдите математическое ожидание случайной величины $S = \{$число выпавших орлов$\}$ в опыте, где симметричную монету бросают:

а) 4 раза; б) 7 раз; в) n раз.

338. Найдите математическое ожидание случайной величины $S = \{$число успехов$\}$ в серии из 10 испытаний Бернулли с вероятностью успеха p в одном испытании.

Пример решения. Для каждого из 10 испытаний рассмотрим случайную величину

$$I_k = \begin{cases} 1, & \text{если в } k\text{-м испытании наступил успех,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Распределение каждой из десяти таких величин:

$$I_k \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix},$$

поэтому $\mathrm{E}I_k = p$. Общее число успехов равно сумме всех I_k:

$$S = I_1 + I_2 + \ldots + I_{10}.$$

Перейдём к математическим ожиданиям:

$$\mathrm{E}S = \mathrm{E}I_1 + \mathrm{E}I_2 + \ldots + \mathrm{E}I_{10} = 10p.$$

339. В торговом центре установлены два автомата, продающие кофе. С вероятностью $p_1 = 0{,}2$ к вечеру в первом автомате заканчивается кофе. Во втором автомате кофе заканчивается к вечеру с вероятностью $p_2 = 0{,}1$. Найдите математическое ожидание числа автоматов, в которых к вечеру закончится к кофе.

Пример решения. Рассмотрим случайные величины I_1 и I_2. Каждая из них равна 1, если в соответствующем автомате закончился кофе, и 0, если не закончился, причём

$$\mathrm{E}I_1 = p_1 \quad \text{и} \quad \mathrm{E}I_2 = p_2.$$

Общее число автоматов, где закончился кофе X, равно $I_1 + I_2$. Значит,

$$\mathrm{E}X = p_1 + p_2 = 0{,}3.$$

340. В торговом центре установлены три платёжных терминала. К вечеру каждый терминал может потребовать обслуживания. Первый — с вероятностью $p_1 = 0{,}2$, второй — с вероятностью $p_2 = 0{,}1$ и третий — с вероятностью $p_3 = 0{,}1$. Найдите математическое ожидание случайной величины «число сервисных обслуживаний автоматов в течение недели».

341. Стрелок стреляет по 8 мишеням — по каждой ровно один раз. Вероятность поражения каждой мишени равна 0,7. Найдите математическое ожидание числа поражённых мишеней.

342. Баскетболист на тренировке бросает мяч в корзину с дистанции 6 м. При каждом одном броске он попадает в корзину с вероятностью 0,8. Найдите математическое ожидание числа попаданий при 50 бросках.

343. Игральную кость бросают один раз. Найдите математическое ожидание случайной величины «число выпавших очков».

344. Игральную кость бросают дважды. Найдите математическое ожидание случайной величины «сумма выпавших очков».

Пример решения. Можно воспользоваться распределением суммы очков. Можно поступить иначе: сумма очков складывается из двух случайных величин: $X = \{$число очков, выпавших в первый раз$\}$ и $Y = \{$число очков, выпавших во второй раз$\}$. В задаче 344 найдено, что $\mathrm{E}X = EY = 3{,}5$. Значит,

$$\mathrm{E}(X + Y) = \mathrm{E}X + \mathrm{E}Y = 2 \cdot 3{,}5 = 7.$$

345. Найдите математическое ожидание суммы выпавших очков в опыте, где игральную кость бросают:

а) 3 раза; б) 4 раза; в) 10 раз; г) n раз.

346*. Симметричную монету бросают до тех пор, пока орёл не выпадет первый раз. Найдите математическое ожидание случайной величины $X = \{$число бросков$\}$.

Пример решения. Удобно пересчитывать броски, в которых выпали решки. Для броска номер k рассмотрим случайную величину

$$I_k = \begin{cases} 1, & \text{если в } k\text{-м броске выпала решка,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В k-м броске случается решка, только если решка случилась перед этим $k-1$ раз, поэтому $P(I_k = 1) = 0{,}5^k$ (см. задачу 297). Получается распределение

$$I_k \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 0{,}5^k & 0{,}5^k \end{pmatrix},$$

откуда $\mathrm{E}I_k = 0{,}5^k$.

Число бросков на один больше, чем число выпавших в начале решек. Поэтому общее число бросков равно

$$X = 1 + I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + \ldots$$

Перейдём к математическим ожиданиям:

$$\mathrm{E}X = 1 + \mathrm{E}I_1 + \mathrm{E}I_2 + \mathrm{E}I_3 + \ldots = 1 + 0{,}5 + 0{,}5^2 + 0{,}5^3 + \ldots$$

Суммируя геометрическую прогрессию, получаем

$$\mathrm{E}X = \frac{1}{1 - 0{,}5} = 2.$$

347*. Стрелок стреляет по мишени до тех пор, пока не собьёт её. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна $p = 0{,}2$. Найдите математическое ожидание числа сделанных выстрелов.

348*. Производится серия испытаний до первого успеха. Вероятность успеха в каждом отдельном испытании равна p. Найдите математическое ожидание случайной величины «число испытаний».

349*. В соответствии с условием задачи 303 страховая компания в некотором регионе страхует сельские дома. Цена годового страхового полиса равна 5000 рублей. Исследования показали, что в течение года в среднем 1 % застрахованных домов подвергается небольшому ущербу (например, упавшее дерево или протекание крыши) и средняя сумма страховой выплаты при этом равна 120 тыс. рублей. В среднем 0,01 % страхователей несёт серьёзный ущерб (пожар, обрушение дома), и средняя сумма выплаты при этом 2 млн рублей. Найдите математическое ожидание случайной величины «средний доход страховой компании от продажи одного полиса».

Пример решения. Распределение случайной величины «средний доход» найдено при решении задачи 303:

$$\begin{pmatrix} -1\,995\,000 & -115\,000 & 5000 \\ 0{,}0001 & 0{,}01 & 0{,}9899 \end{pmatrix}.$$

Математическое ожидание дохода равно

$$-1\,995\,000\cdot 0{,}0001 - 115\,000\cdot 0{,}01 + 5000\cdot 0{,}9899 = 3600.$$

350*. Страховая компания в некотором регионе страхует владельцев автомобилей. Цена годового страхового полиса равна 30 000 рублей. Исследования показали, что в течение года владелец автомобиля попадает в мелкую аварию с вероятностью 0,11 и средняя сумма страховой выплаты при этом равна 50 000 рублей. С вероятностью 0,03 автомобилист попадает в серьёзную аварию, и средняя сумма выплаты при этом 630 000 рублей. Найдите математическое ожидание случайной величины «средний доход страховой компании от продажи одного полиса».

351*. В соответствии с условием задачи 309 билет лотереи «5 из 36» стоит 50 рублей. В билете 36 номеров — от 1 до 36. Участник лотереи выбирает и зачёркивает в билете любые 5 из них — на свой вкус. Потом проводится тираж лотереи: случайным образом выпадают 5 выигрышных номеров. Выигрыш зависит от числа угаданных номеров.

Угаданных номеров	3	4	5
Выигрыш	50 рублей	5 тыс. рублей	2 млн рублей

Найдите математическое ожидание случайной величины «доход устроителей лотереи от продажи одного билета». Вычисления проведите с помощью компьютера или калькулятора. Результат округлите до копеек.

Пример решения. Распределение случайной величины «доход устроителей» построено при решении задачи 309:

$$\begin{pmatrix} -1\,999\,950 & -4950 & 0 & 50 \\ \dfrac{C_5^5C_{31}^0}{C_{36}^5} & \dfrac{C_5^4C_{31}^1}{C_{36}^5} & \dfrac{C_5^3C_{31}^2}{C_{36}^5} & \dfrac{C_5^2C_{31}^3+C_5^1C_{31}^4+C_5^0C_{31}^5}{C_{36}^5} \end{pmatrix}.$$

Расчёт с помощью компьютера даёт примерно 42 рубля 2 копейки. Если округлить вероятности отдельно, то за счёт набегающей ошибки округления может получиться другой ответ. Отличие может составить около рубля.

Другой способ решения состоит в том, чтобы найти математическое ожидание случайной величины «сумма выигрыша», а затем вычесть его из 50 рублей.

352*. В соответствии с условием задачи 310 билет некоторой лотереи «6 из 49» стоит 50 рублей. В билете 49 номеров — от 1 до 49. Участник лотереи выбирает и зачёркивает любые 6 из них — на свой вкус. Потом проводится тираж лотереи: из барабана выпадают 6 случайных выигрышных номеров. Выигрыш игрока зависит от числа номеров, которые он угадал (см. таблицу).

Число угаданных номеров	4	5	6
Выигрыш	50 рублей	500 тыс. рублей	200 млн рублей

Найдите математическое ожидание случайной величины «доход устроителей лотереи от продажи одного билета». Вычисления проведите с помощью компьютера или калькулятора. Округлите до копеек.

Указание. Если округлять вероятности перед вычислением, то за счёт набегающей ошибки ответ может получиться близким, но другим.

Задания для домашней работы

353. Случайная величина X задана распределением. Найдите $\mathrm{E}X$.

а) $X \sim \begin{pmatrix} -2 & 4 & 8 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}$; б) $X \sim \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & 5 \\ 0{,}01 & 0{,}34 & 0{,}54 & 0{,}11 \end{pmatrix}$.

354. Пользуясь симметричностью распределений, найдите математическое ожидание случайной величины:

а) $X \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 0{,}01 & 0{,}24 & 0{,}5 & 0{,}24 & 0{,}01 \end{pmatrix}$;

б) $Y \sim \begin{pmatrix} -5 & -3 & -1 & 1 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.

355. Дана случайная величина X, и известно её математическое ожидание: $\mathrm{E}X = 2$. Найдите математическое ожидание случайной величины:

а) $Y = 3X$; б) $Z = 2 - 5X$; в) $U = \frac{1}{2}X + 3$; г) $W = \frac{4 - X}{3}$.

356. Найдите математическое ожидание случайной величины X^2, если

а) $X \sim \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix}$; б) $X \sim \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 & 2 & 3 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.

357. Даны случайные величины X и Y и их математические ожидания: $\mathrm{E}X = 3$, $\mathrm{E}Y = 4$. Найдите математическое ожидание случайной величины:

а) $Z = X + Y$; б) $W = Y - 3X$; в) $U = \frac{1}{3}X - \frac{1}{2}Y$.

358. Симметричную монету бросают восемь раз. Найдите математическое ожидание случайной величины $S = \{$число выпавших орлов$\}$.

359. Найдите математическое ожидание случайной величины «сумма очков при пяти бросаниях игральной кости».

360. Найдите математическое ожидание случайной величины «квадрат числа, выпавшего при одном бросании игральной кости».

361. Стрелок стреляет по очереди по 9 мишеням. Вероятность поражения каждой мишени равна 0,3. Найдите математическое ожидание числа поражённых мишеней.

362*. Сергей пытается отправить СМС в условиях неустойчивого мобильного сигнала. Телефон делает попытки отправить СМС до тех пор, пока это не удастся. Известно, что вероятность удачной попытки равна 0,08 независимо от предыдущих попыток. Найдите математическое ожидание числа сделанных попыток.

§ 11. Дисперсия и стандартное отклонение случайной величины

Пояснение. Одно только математическое ожидание недостаточно характеризует случайную величину, поскольку показывает, где центр распределения, но не показывает, насколько значения сосредоточены вблизи этого центра.

Для измерения рассеивания применяются разные меры. Наиболее употребительными являются *дисперсия*[1] $\mathrm{D}X$ и *стандартное отклонение* случайной величины.

Дисперсия — средний квадрат отклонения случайной величины. Более точно — это математическое ожидание квадрата отклонения значений случайной величины от её математического ожидания:

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)^2.$$

Дисперсия получила широкое применение благодаря своим свойствам.

1°. Если случайная величина X имеет дисперсию, то для любых чисел a и b справедливо равенство

$$\mathrm{D}(aX + b) = a^2\mathrm{D}X,$$

в частности, дисперсия константы равна нулю: $\mathrm{D}b = 0$.

2°. Если случайные величины X и Y имеют дисперсии и при этом *независимы*, то случайная величина $X + Y$ также имеет дисперсию, при этом

$$\mathrm{D}(X + Y) = \mathrm{D}X + \mathrm{D}Y.$$

Это свойство верно не только для двух, но и для произвольного числа независимых случайных величин.

3°. Другая формулировка дисперсии:

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}X^2 - \mathrm{E}^2X.$$

Часто эта формула удобнее, чем определение. Смысл формулы: дисперсия равна математическому ожиданию квадрата без квадрата математического ожидания. Менее строго: дисперсия равна среднему квадрату без квадрата среднего.

---

[1] В записи дисперсии $\mathrm{D}X$ можно ставить скобки: $\mathrm{D}(X)$. Однако обычно их опускают. Если же запись сложнее, то скобки ставят. Например, $\mathrm{D}(2X)$ или $\mathrm{D}(X + Y)$ и т. п.

Дисперсия имеет недостаток: если случайная величина измеряется в некоторых единицах, то её дисперсия измеряется в квадратных единицах. Чтобы измерять рассеивание в тех же единицах, в каких выражена сама случайная величина, из дисперсии извлекают квадратный корень. Получается *стандартное отклонение* случайной величины: $\sqrt{\mathrm{D}X}$.

В большинстве задач стандартное отклонение следует рассматривать как среднее, типичное отклонение. Для многих важных распределений известно, какая доля значений попадает в промежуток от $\mathrm{E}X - \sqrt{\mathrm{D}X}$ до $\mathrm{E}X + \sqrt{DX}$ или в промежуток от $\mathrm{E}X - 2\sqrt{DX}$ до $\mathrm{E}X + 2\sqrt{\mathrm{D}X}$ и т. д.

Важно, чтобы учащийся понимал, что стандартное отклонение характеризует среднее отклонение значений случайной величины от её математического ожидания.

Обратите особое внимание на задачи 376—381, где поэтапно получаются формулы для математического ожидания и дисперсии числа успехов в серии испытаний Бернулли, т. е. биномиального распределения.

Задачи для работы в классе

363. Случайная величина задана распределением

$$X \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 6 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

а) Найдите распределение случайной величины $(X - \mathrm{E}X)^2$.

б) Вычислите дисперсию и стандартное отклонение случайной величины X.

Пример решения. Находим математическое ожидание:

$$\mathrm{E}X = -2 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}4 + 3 \cdot 0{,}4 + 6 \cdot 0{,}1 = 2.$$

Теперь последовательно находим распределения случайных величин $X - \mathrm{E}X = X - 2$ и $(X - \mathrm{E}X)^2 = (X - 2)^2$

$$X - 2 \sim \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 & 4 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}1 \end{pmatrix},$$

$$(X-2)^2 \sim \begin{pmatrix} 16 & 1 & 1 & 16 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 16 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}(X-2)^2 = 1 \cdot 0{,}8 + 16 \cdot 0{,}2 = 4, \quad \sqrt{\mathrm{D}X} = 2.$$

364. Случайная величина X задана распределением
$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$
Найдите:

а) распределение случайной величины $(X - \mathrm{E}X)^2$;

б) дисперсию $\mathrm{D}X$ и стандартное отклонение $\sqrt{\mathrm{D}X}$ случайной величины X.

365. Найдите дисперсию случайной величины
$$X \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Пример решения. Применим формулу $\mathrm{D}X = \mathrm{E}X^2 - \mathrm{E}^2X$. Требуется найти $\mathrm{E}X$ и $\mathrm{E}X^2$.

Воспользуемся тем, что распределение симметрично: $\mathrm{E}X = 0$. Осталось найти распределение X^2:
$$X^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$
Тогда
$$\mathrm{E}X^2 = 0 \cdot 0{,}4 + 1 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}2 = 1{,}2.$$
Следовательно,
$$\mathrm{D}X = 1{,}2 - 0^2 = 1{,}2.$$

366. Найдите дисперсию случайной величины
$$X \sim \begin{pmatrix} -5 & -3 & 0 & 4 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Пример решения. Применим формулу $\mathrm{D}X = \mathrm{E}X^2 - \mathrm{E}^2X$. Требуется найти $\mathrm{E}X$ и $\mathrm{E}X^2$. Имеем
$$\mathrm{E}X = -0{,}5 - 0{,}9 + 0 + 0{,}4 = -1$$
Найдём распределение и математическое ожидание величины X^2:
$$X^2 \sim \begin{pmatrix} 25 & 9 & 0 & 16 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$
(можно не располагать значения по возрастанию). Тогда
$$\mathrm{E}X^2 = 2{,}5 + 2{,}7 + 1{,}6 = 6{,}8.$$
Следовательно,
$$\mathrm{D}X = 6{,}8 - (-1)^2 = 5{,}8.$$

367. Найдите дисперсию случайной величины

$$X \sim \begin{pmatrix} 6 & 8 & 11 & 15 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Указание. Ничто не мешает вычислить дисперсию по формуле. Но сначала можно уменьшить все значения на любое число, и при этом дисперсия не изменится (свойство 1°). Например, можно уменьшить все значения на 11. Получится распределение

$$X - 11 \sim \begin{pmatrix} -5 & -3 & 0 & 4 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Задача свелась к уже решённой задаче 366.

368. Найдите дисперсию случайной величины:

а) $X \sim \begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix}$; б) $X \sim \begin{pmatrix} -7 & -4 & -3 & -2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$;

в) $X \sim \begin{pmatrix} -8 & -7 & -3 & 3 & 5 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

369. Найдите дисперсию случайной величины:

а) $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}$; б) $X \sim \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$;

в) $X \sim \begin{pmatrix} 11 & 13 & 15 & 16 & 19 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

370. Игральную кость бросают один раз. Найдите дисперсию и стандартное отклонение случайной величины «число выпавших очков». Стандартное отклонение округлите до тысячных.

Указание. Удобно воспользоваться формулой $\mathrm{D}X = \mathrm{E}X^2 - \mathrm{E}^2X$.

371. Случайная величина X имеет дисперсию 2. Найдите дисперсию случайной величины:

а) $X - 3$; б) $2X$; в) $3X - 4$; г) $-X$.

Пример решения. Нужно воспользоваться свойством 1° дисперсии

$$\mathrm{D}(X-3) = \mathrm{D}X = 2, \quad \mathrm{D}(2X) = 4\mathrm{D}X = 8,$$
$$\mathrm{D}(3X-4) = \mathrm{D}(3X) = 9\mathrm{D}X = 18.$$

При решении п. г), нужно учесть, что $-X = (-1)\cdot X$:

$$\mathrm{D}(-X) = (-1)^2\mathrm{D}X = \mathrm{D}X = 2.$$

372. Случайная величина X имеет дисперсию 2,4. Найдите дисперсию случайной величины:

а) $2X-3$; б) $5-2X$; в) $-X+7$; г) $\frac{1}{2}X+3$.

373. Даны две независимые случайные величины X и Y. Известно, что $\mathrm{D}X=1$, $\mathrm{D}Y=5$. Найдите дисперсию случайной величины:

а) $X+Y$; б) $X-Y$; в) $3X+2Y$; г) $2X-3Y-9$.

Пример решения. Поскольку случайные величины независимы, можно воспользоваться свойством 2°:

$$\mathrm{D}(X+Y)=\mathrm{D}X+\mathrm{D}Y=6.$$

Дисперсия разности независимых случайных величин *не равна разности дисперсий*. При вычислении дисперсии разности нужно учесть свойство 1°:

$$\mathrm{D}(X-Y)=\mathrm{D}(X+(-Y))=\mathrm{D}X+\mathrm{D}(-Y)=\mathrm{D}X+\mathrm{D}Y=6,$$

т. е. дисперсия разности оказалась равна сумме дисперсий,

$$\mathrm{D}(3X+2Y)=\mathrm{D}(3X)+\mathrm{D}(2Y)=9\mathrm{D}X+4\mathrm{D}Y=9+4\cdot 5=29,$$
$$\mathrm{D}(2X-3Y-9)=\mathrm{D}(2X-3Y)=4\mathrm{D}X+9\mathrm{D}Y=49.$$

374. Даны две независимые случайные величины X и Y. Известно, что $\mathrm{D}X=4$, $\mathrm{D}Y=9$. Найдите дисперсию случайной величины:

а) $X+Y$; б) $X-Y$; в) $\frac{X+Y}{2}$; г) $-\frac{X}{2}+\frac{Y}{3}+5$.

375. Игральную кость бросают два раза. Найдите дисперсию и стандартное отклонение случайной величины «сумма выпавших очков». Результаты при необходимости округлите до тысячных.

Пример решения. Пусть в первый раз выпало X очков, а во второй раз выпало Y очков. Распределения случайных величин X и Y одинаковы: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$. При решении задачи 370 найдена дисперсия этого распределения: $\mathrm{D}X=\mathrm{D}Y=\frac{35}{12}$. Случайные величины X и Y независимы. Поэтому согласно свойству 2° дисперсия суммы равна

$$\mathrm{D}(X+Y)=\mathrm{D}X+\mathrm{D}Y=\frac{35}{6}.$$

Стандартное отклонение равно $\sqrt{\frac{35}{6}}\approx 2{,}415$.

376. Найдите дисперсию и стандартное отклонение случайной величины «сумма выпавших очков при бросаниях игральной кости», если кость бросили:

а) 3 раза; б) 10 раз; в) 120 раз; г) n раз.

При необходимости результаты округляйте до тысячных.

Обсуждение. Обратите внимание на то, что стандартное отклонение растёт намного медленнее, чем число бросаний. Это хорошо видно после решения п. г): стандартное отклонение пропорционально величине $\sqrt{n}$.

377. Вычислите дисперсию случайной величины:

а) $I \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$; б) $I \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$ (где $q = 1 - p$).

Пример решения. Воспользуемся формулой $\mathrm{D}I = \mathrm{E}I^2 - \mathrm{E}^2 I$ и будем решать задачу, начиная с п. б). Найдём математическое ожидание:

$$\mathrm{E}I = p.$$

При вычислении $\mathrm{E}I^2$ заметим, что $I^2 = I$, поэтому

$$\mathrm{E}I^2 = \mathrm{E}I = p.$$

Следовательно,

$$\mathrm{D}I = p - p^2 = p(1-p) = pq.$$

В частности, в п. а) получается $\mathrm{D}I = 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 0{,}21$.

378. Симметричную монету бросили 2 раза. Первому и второму броскам поставим в соответствие случайные величины I_1 и I_2. Пусть $I_1 = 1$, если при первом броске выпал орёл, и $I_1 = 0$, если выпала решка. Аналогично I_2 отвечает за результат второго броска.

а) Найдите дисперсию величин I_1 и I_2.

б) Выразите через I_1 и I_2 случайную величин $S = \{$число выпавших орлов$\}$ и найдите дисперсию этой случайной величины.

в) Выразите через I_1 и I_2 случайную величину $F = \{$частота выпадения орла$\}$ и найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины F.

Пример решения. Случайная величина I_1 распределена по закону $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$:

$$\mathrm{E}I_1 = 0{,}5, \quad \mathrm{E}I_1^2 = \mathrm{E}I_1 = 0{,}5.$$

Поэтому

$$\mathrm{D}I_1 = 0{,}5 - 0{,}5^2 = 0{,}5 - 0{,}25 = 0{,}25.$$

Такая же дисперсия и у I_2. Очевидно, $S = I_1 + I_2$. В силу независимости результатов бросаний

$$\mathrm{D}S = \mathrm{D}(I_1 + I_2) = \mathrm{D}I_1 + \mathrm{D}I_2 = 0{,}25 + 0{,}25 = 0{,}5.$$

Частота выпадений орла равна отношению числа орлов к числу бросаний:

$$F = \frac{S}{2} = \frac{I_1 + I_2}{2}.$$

Следовательно,

$$\mathrm{E}F = \frac{\mathrm{E}I_1 + \mathrm{E}I_2}{2} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{2} = 0{,}5,$$

$$\mathrm{D}F = \frac{\mathrm{D}(I_1 + I_2)}{4} = \frac{\mathrm{D}I_1 + \mathrm{D}I_2}{4} = 0{,}125.$$

379. Симметричную монету бросили 3 раза. Каждому броску с номером k (1, 2 и 3) поставим в соответствие случайную величину I_k, определённую правилом:

$$I_k = \begin{cases} 1, & \text{если при } k\text{-м броске выпал орёл,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

а) Выразите через величины I_k случайную величин $S = \{$число выпавших орлов$\}$ и найдите дисперсию этой величины.

б) Выразите через величины I_k случайную величину $F = \{$частота выпадения орла$\}$ и найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины F.

380*. Симметричную монету бросили n раз. Каждому броску с номером k от 1 до n поставим в соответствие случайную величину I_k, определённую правилом:

$$I_k = \begin{cases} 1, & \text{если при } k\text{-м броске выпал орёл,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

а) Выразите через величины I_k случайную величину $S = \{$число выпавших орлов$\}$ и найдите дисперсию этой величины.

б) Выразите через величины I_k случайную величину $F = \{$частота выпадения орла$\}$ и найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины F.

Обсуждение. Задача является обобщением двух предыдущих. В результате решения задачи получается важный результат: математическое ожидание частоты события «выпал орёл» не меняется и остаётся равной $\frac{1}{2}$ независимо от числа бросаний, а дисперсия частоты зависит от n: чем n больше, тем дисперсия меньше. Это говорит о том, что при большом числе бросаний частота выпадения орла будет, скорее всего, мало отличаться от вероятности выпадения орла. Так проявляется *закон больших чисел*. Следующие задачи обобщают эти результаты на количество успехов и частоту успеха в сериях произвольных испытаний.

381*. Производится серия из n одинаковых независимых испытаний Бернулли. Вероятность успеха в каждом испытании равна p, вероятность неудачи равна $q=1-p$. Каждому испытанию с номером k от 1 до n поставим в соответствие случайную величину I_k, определённую правилом:

$$I_k = \begin{cases} 1, & \text{если в } k\text{-м испытании случился успех,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Выразите через величины I_k случайную величину $S=\{\text{число успехов}\}$ и найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины S.

382*. Производится серия из n одинаковых независимых испытаний Бернулли. Успехом в каждом испытании является событие A, вероятность которого равна p. Вероятность неудачи равна $q=1-p$. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $F=\{\text{частота события } A\}$.

Обсуждение. Каково бы ни было событие A в повторяющихся одинаковых испытаниях, его частота при большом числе испытаний будет мало отличаться от его вероятности, поскольку математическое ожидание частоты равно вероятности, а дисперсия уменьшается при росте числа испытаний n. Это одно из проявлений закона больших чисел.

383*. Производится одно испытание Бернулли с вероятностью успеха p и вероятностью неудачи $q=1-p$.

а) Найдите дисперсию случайной величины $I=\{\text{число наступивших успехов}\}$.

б) В каком случае дисперсия числа наступивших успехов больше: если испытанием является бросание кости (успех — выпадение шестёрки) или если испытанием является бросание монеты (успех — орёл)?

в) При каких значениях p дисперсия будет наибольшей? Приведите пример испытания с наибольшей возможной дисперсией.

Пример решения. Случайная величина I принимает 2 значения 0 и 1 с вероятностями q и p:

$$I \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}.$$

Имеем $\mathrm{E}I = p$, $\mathrm{E}I^2 = \mathrm{E}I = p$, поэтому

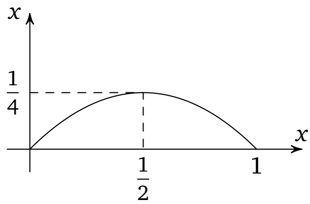
$$\mathrm{D}I = \mathrm{E}I^2 - E^2 I = p - p^2 = p(1-p) = pq.$$

Если успех — это шестёрка при бросании кости, то $p = \frac{1}{6}$ и $q = \frac{5}{6}$. Тогда $\mathrm{D}I = \frac{5}{36}$.

Если успех — это орёл при бросании монеты, то $p = q = \frac{1}{2}$, поэтому $\mathrm{D}I = \frac{1}{4} > \frac{5}{36}$.

Чтобы решить п. в), рассмотрим дисперсию $\mathrm{D}I$ как функцию переменной p. Перейдём к привычным обозначениям: $y = \mathrm{D}I$, $x = p$. Тогда $y = x(1-x)$, т. е. $y = x - x^2$.

Графиком этой функции является парабола на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$.



Эта функция принимает наибольшее значение $\mathrm{D}I = y = \frac{1}{4}$ при $p = x = \frac{1}{2}$. Таким образом, наибольшая дисперсия числа успехов будет в испытании, где вероятность успеха равна 0,5, например при бросании монеты.

384*. Два стрелка делают по пять выстрелов. Вероятность того, что первый стрелок попадает в мишень, равна $p_1 = 0{,}3$ при каждом отдельном выстреле. Вероятность попадания для второго стрелка равна $p_2 = 0{,}7$.

а) У какого из стрелков математическое ожидание числа попаданий больше?

б) У какого из стрелков стандартное отклонение числа попаданий больше?

в) Можно ли утверждать, что второй стрелок попадёт больше раз, чем первый?

385*. В социологическом опросе участвуют 2000 респондентов. Им задают два вопроса: «Довольны ли вы своей работой?» и «Довольны ли вы своей зарплатой»?. Вероятность ответа «да» на первый вопрос примерно 0,7. Вероятность ответа «да» на второй вопрос примерно 0,2. Для какого из вопросов дисперсия случайной величины «число ответов „Да“» выше? На сколько?

386*. В некотором регионе 10 % старшеклассников участвуют в олимпиадах по разным предметам; 70 % старшеклассников планируют поступать в высшие учебные заведения. В опросе участвует 1000 случайно выбранных старшеклассников. Им задают два вопроса: «Участвуете ли вы в олимпиадах?» и «Планируете ли вы поступать в вуз?». Для какого из вопросов доля ответов «нет» в этой выборке окажется, скорее всего, ближе к вероятности такого ответа?

Указание. Вероятность ответа «нет» на первый вопрос 0,9, а на второй 0,3. Дисперсия частоты ответов «нет» на первый вопрос равна $1000 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 90$, а на второй — $1000 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 210$. Первая дисперсия меньше, поэтому, скорее всего, частота ответа «нет» на первый вопрос ближе к вероятности такого ответа.

387*. В крупном городе в социологическом опросе участвуют 2400 взрослых респондентов. Им задают два вопроса: «Есть ли у вас домашний питомец?» и «Пользуетесь ли вы услугами зоомагазина АБВ?». Доля ответов «да» на первый вопрос равна 60 %. Доля ответов «да» на второй вопрос — 10 %. Для какого из вопросов доля ответов «да» в этой выборке, скорее всего, ближе к вероятности такого ответа во всей совокупности взрослых жителей этого города? Обоснуйте ответ.

Задания для домашней работы

388. Найдите распределение случайной величины $(X - \mathrm{E}X)^2$ и затем вычислите дисперсию случайной величины:

а) $X \sim \begin{pmatrix} -5 & 4 & 9 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}$; б) $X \sim \begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 & 5 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}1 \end{pmatrix}$.

389. Найдите дисперсию и стандартное отклонение случайной величины, имеющей симметричное распределение:

а) $X \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 0{,}01 & 0{,}24 & 0{,}5 & 0{,}24 & 0{,}01 \end{pmatrix}$;

б) $Y \sim \begin{pmatrix} -5 & -3 & -1 & 1 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.

При необходимости результат округлите до тысячных.

390. Найдите дисперсию случайной величины:

а) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}$; б) $X \sim \begin{pmatrix} -12 & -9 & -8 & -7 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$;

в) $X \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 & 14 & 16 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

391. Про случайную величину X известно, что $\mathrm{E}X = 6$ и $\mathrm{D}X = 9$. Найдите $\mathrm{E}X^2$.

392. Про случайную величину X известно, что $\mathrm{E}X^2 = 17$. Может ли дисперсия этой случайной величины равняться:

а) 19; б) 15; в) 17?

393. Случайная величина X имеет дисперсию 18. Найдите дисперсию случайной величины:

а) $X - 12$; б) $2X$; в) $\frac{1}{3}X + 8$.

394. Случайная величина X имеет дисперсию 7,2. Найдите дисперсию случайной величины:

а) $\frac{1}{2}X + 5$; б) $5 - X$; в) $\dfrac{X + 1{,}5}{6}$.

395. Даны две независимые случайные величины X и Y с дисперсиями $\mathrm{D}X = 9$, $\mathrm{D}Y = 16$. Найдите дисперсию случайной величины:

а) $X + Y$; б) $X - Y$; в) $2X + 3Y + 7$; г) $\frac{1}{3}X - \frac{1}{4}Y$.

396. В случайном эксперименте игральную кость бросают 4 раза. Найдите дисперсию случайной величины «сумма выпавших очков».

Карточки для индивидуальной работы

Первый номер в карточке указывает параграф, к которому составлена карточка. Вторая цифра — номер варианта.

1.1

1. Симметричную монету бросили 3 раза. Какое из событий более вероятно:

а) $A =$ {результаты не всех бросков одинаковы} или $B =$ {результаты всех трёх бросков одинаковы};

б) $C =$ {выпало не более двух орлов} или $D =$ {выпало не более двух решек}?

2*. Правильную игральную кость бросают дважды. Найдите вероятность события:

а) «наибольшее из выпавших чисел равно 5»;

б) «во второй раз выпало не меньше, чем в первый».

в) «произведение выпавших очков не больше 17»;

1.2

1. Симметричную монету бросили 3 раза. Найдите вероятность события:

а) $A =$ {результаты не всех бросков одинаковы};

б) $B =$ {решек либо нет вовсе, либо две}.

2*. Правильную игральную кость бросают дважды. Какая сумма очков наиболее вероятна? Обоснуйте решение.

1.3

1. Симметричную монету бросили 3 раза. Известно, что хотя бы один из бросков дал орла. Какова при этом условии вероятность того, что выпала ровно одна решка?

2*. Правильную игральную кость бросают дважды. Какое из событий более вероятно:

а) $A = \{$числа выпавших очков совпадают$\}$ или $B = \{$числа выпавших очков отличаются на 1$\}$;

б) $A = \{$сумма выпавших очков равна 7$\}$ или $B = \{$числа выпавших очков совпадают$\}$?

2.1

1. На математический праздник записались 4000 семиклассников, и всех их разместили в 3 корпусах университета — в первом корпусе 1500 человек, а во второй и третий попали все остальные поровну. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник оказался записан в третий корпус.

2*. На столе лежало 6 серебряных монет и 2 золотые. Буратино разложил их случайным образом по двум карманам поровну — 4 в левый и 4 в правый. Найдите вероятность того, что обе золотые монеты:

а) попали в один карман;

б) попали в правый карман.

2.2

1. Студент знает ответы на 19 из 41 вопроса, которые будут на экзамене. На экзамене студенту досталось 2 вопроса. Ответ на первый вопрос студент знает. Найдите вероятность того, что на второй вопрос студент тоже знает ответ.

2*. При пятикратном бросании монеты возможно 32 разных элементарных события: ОРРОР, ООРОО и т. п. Двое бросают монету по 5 раз каждый. Найдите вероятность того, что последовательности выпадений орлов и решек у этих двоих совпадут.

2.3

1. Научная конференция проходит в 3 дня. Всего запланировано 24 доклада — в первый и второй день поровну, оставшиеся 6 докладов — в третий день. На конференции планируется доклад профессора А. Порядок докладов случайный. Какова вероятность того, что доклад профессора А окажется запланированным на первый день конференции?

2*. Автобусный билетик имеет шестизначный номер. Считая, что все цифры случайно выбранного билетика случайны, найдите вероятность того, что номер билетика — палиндром (одинаково читается справа налево и слева направо, например 045540).

3.1

1. Барометр измеряет атмосферное давление. Рассмотрите следующие события:

$A=${давление от 750 до 770 мм рт. ст.},

$B=${давление не меньше 730 мм рт. ст.},

$C=${давление больше 745 мм рт. ст.},

$D=${давление от 755 до 765 мм рт. ст.}.

Среди указанных событий укажите событие с наименьшей вероятностью.

2*. Если вес куриного яйца превышает 75 г, то его относят к категории «отборная». Если вес яйца от 65 до 74 г, то его относят к категории С0 (высшая). Известно, что в категорию «отборная» попадает 8 % яиц, а 69 % яиц имеет вес меньше 65 г. Найдите вероятность того, что случайно выбранное яйцо попадёт в высшую категорию.

3.2

1. Вероятность того, что в городе М солнечных дней в году будет больше чем 250, равна 0,24. Найдите вероятность того, что в следующем году в этом городе солнечных дней будет 250 или меньше.

2*. Величина X принимает случайные значения. Известно, что $\mathrm{P}(X \geqslant 2)=0{,}2$, $\mathrm{P}(X \geqslant 3)=0{,}15$ и $\mathrm{P}(X \geqslant 4)=0{,}03$. Найдите вероятность события:

а) $X<2$; б) $2 \leqslant X<3$.

в) Некто утверждает, что на основании условия задачи можно сделать вывод, что вероятность события $X=3$ равна 0,12. Покажите, что некто ошибается.

3.3

1. Вероятность того, что на тестировании по химии студент А. верно решит хотя бы 10 задач, равна 0,34. Вероятность того, что А. верно решит больше 8 задач, равна 0,54. Найдите вероятность того, что А. верно решит ровно 9 задач.

2*. При изготовлении гаек диаметр резьбы может несколько отклоняться от заданного значения. Вероятность того, что диаметр окажется в интервале допустимых значений, равна 0,95. Вероятность того, что диаметр окажется больше нижнего допустимого значения, равна 0,98. Найдите вероятность того, что диаметр окажется меньше верхнего допустимого значения.

4.1

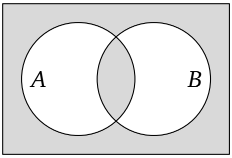
1. Вероятность того, что нужного лекарства нет в первой аптеке, равна 0,3. Вероятность того, что этого же лекарства нет в другой аптеке, равна 0,4. При этом вероятность того, что его нет в обеих аптеках, оказалась равна 0,18.

а) Можно ли считать, что поставки товаров в эти две аптеки производятся с разных складов независимо друг от друга?

б) Найдите вероятность того, что нужное лекарство можно купить хотя бы в одной из этих аптек.

в) Чему равна вероятность того, что нужное лекарство только в первой аптеке?

2*. Запишите с помощью знаков пересечения и объединения событие, показанное на диаграмме Эйлера.



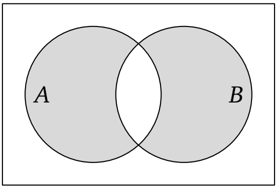
4.2

1. Игральную кость бросают два раза. Рассмотрите 2 события: «в первый раз выпало меньше трёх очков» и «сумма выпавших очков равна 7».

а) Являются ли эти события независимыми?

б) Найдите вероятность того, что ни одно из этих событий не наступит.

2*. Запишите с помощью знаков пересечения и объединения событие, показанное на диаграмме Эйлера.



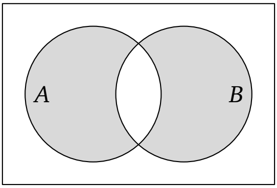
4.3

1. Игральную кость бросают 2 раза. Рассмотрите два события: «в первый раз выпало больше трёх очков» и «сумма выпавших очков равна 8».

а) Являются ли эти события независимыми?

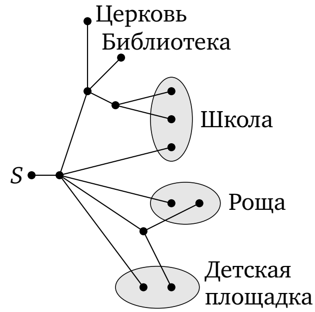
б) Найдите вероятность того, что ни одно из этих событий не наступит.

2*. Даны два события A и B. Сравните вероятности событий $\bar{A}\cup\bar{B}$ и $\overline{A\cap B}$. Совет: удобно пользоваться диаграммой Эйлера.



5.1

1. Антон гуляет по своему дачному посёлку. Он выходит из точки S и на каждой развилке с равными шансами выбирает следующую дорожку. Схема дорожек показана на рисунке.



Найдите вероятность того, что Антон:

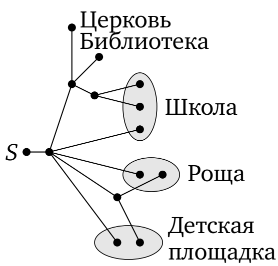
а) придёт в рощу;

б) не окажется ни у школы, ни у библиотеки.

2*. Фирма «Зорька» выпускает молоко в бутылках на двух заводах: А и Б. Известно, что 40 % бутылок с завода А поступают в торговую сеть «Супер», а с завода Б в эту сеть поступают только 25 % бутылок. Какова вероятность того, что случайно выбранная в магазине «Супер» бутылка фирмы «Зорька» произведена на заводе А, если известно, что 70 % своей продукции «Зорька» отгружает другим торговым сетям?

5.2

1. Антон гуляет по своему дачному посёлку. Он выходит из точки S и на каждой развилке с равными шансами выбирает следующую дорожку. Схема дорожек показана на рисунке.



Найдите вероятность того, что Антон:

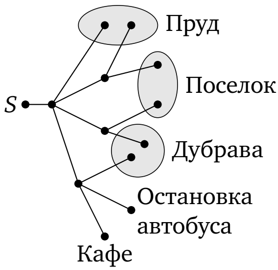
а) придёт к библиотеке;

б) не окажется ни в роще, ни на детской площадке.

2*. Фирма «Зорька» выпускает молоко в бутылках на двух заводах: А и Б. Завод А производит лишь 45 % всех бутылок, остальное производится на заводе Б. Известно, что 40 % бутылок с завода А поступают в торговую сеть «Супер», а с завода Б в эту сеть поступают только 20 % бутылок. Следователь Башковицкий, расследуя ужасное преступление, обнаружил, что главная улика — бутылка молока фирмы «Зорька» — была куплена подозреваемым в магазине «Супер». Какова вероятность того, что эта бутылка изготовлена на заводе А?

5.3

1. Павел гуляет по окрестностям своей дачи. Он выходит из точки S и на каждой развилке с равными шансами выбирает следующую дорожку. Схема дорожек показана на рисунке.



Найдите вероятность того, что Павел:

а) придёт к пруду;

б) не окажется ни в посёлке, ни на остановке автобуса.

2*. Правильную игральную кость бросают и складывают выпавшие очки. В какой-то момент сумма очков оказалась равна 3. Найдите вероятность того, что было сделано ровно 2 броска.

6.1

1. Производятся последовательные одинаковые и независимые испытания до тех пор, пока не наступит успех. В каждом отдельном испытании вероятность успеха равна $p < 1$, а вероятность неудачи равна $q = 1 - p < 1$.

а) Найдите вероятность события $A = \{$успех случится при девятом испытании$\}$.

б) Найдите вероятность события $B = \{$успех случится позже восьмого испытания$\}$.

в) Какое из событий A и B более вероятно?

2*. Два пирата Джон и Билл бросают жребий — кому достанется добыча. Джон предложил такой способ: они по очереди бросают игральную кость, пока не выпадет шестёрка. У кого выпала — тот и победил. Первым бросает Джон. Найдите вероятность того, что выиграет Билл.

6.2

1. Стрелок на тренировке в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не попадёт в неё. Вероятность промаха при каждом отдельном выстреле равна q. Найдите вероятность того, что стрелку потребуется от 3 до 8 попыток.

2*. Автомеханик Петров должен поменять в автомобиле самую главную гайку. По опыту Петров точно знает, что с вероятностью 0,5 он новую гайку потеряет, а с вероятностью 0,2 он её сломает. Сколько ему нужно иметь с собой гаек, чтобы с вероятностью не ниже 0,9 ремонт получился?

6.3

1. Производятся последовательные одинаковые и независимые испытания до тех пор, пока не наступит успех. В каждом отдельном испытании вероятность успеха равна $p = 0{,}3$. Что более вероятно: будет сделано меньше 3 испытаний или больше 2?

2*. Стрелок на тренировке стреляет сперва по одной мишени, пока её не собьёт, а затем — по второй такой же мишени, тоже до первого попадания. Вероятность попасть в мишень при каждом одном выстреле равна p. Найдите вероятность того, что всего потребуется ровно 7 выстрелов, чтобы поразить обе мишени.

7.1

1. В серии из 9 испытаний Бернулли с вероятностью успеха $p = 0{,}4$ найдите:

а) вероятность ровно 4 успехов;

б) вероятность менее 3 успехов.

Результаты округлите до тысячных.

2*. Чтобы быстро давать пассажирам сдачу, кассиры метро обычно заранее заготавливают столбики из десятирублёвых монет по 5 штук в каждом столбике. Разумеется, кассир не следит, как в столбиках расположены монеты — орлом вверх или вниз. Это случайно. У кассира на столе два таких столбика. Найдите вероятность того, что в обоих столбиках одинаковое число монет лежит орлом вверх.

7.2

1. Стрелок на тренировке в тире стреляет по мишени 8 раз. Известно, что вероятность попадания в мишень равна $p = 0{,}75$. Найдите вероятность того, что он попадёт в мишень:

а) ровно 6 раз;

б) более 6 раз.

Результаты округлите до тысячных.

2*. По условиям соревнований если стрелок не попал в мишень с первого раза, то ему даётся вторая попытка. Третьей попытки нет. Стрелок стреляет по 6 мишеням. Вероятность попадания в мишень каждым одним выстрелом равна 0,8. Найдите вероятность того, что стрелок в конечном итоге поразит ровно 5 мишеней из 6. Результат округлите до тысячных.

7.3

1. На заводе делают болты для мебели. Известно, что в среднем 4 % болтов, поступающих в магазины, имеют бракованную резьбу. Пётр Сергеевич купил шкаф, в комплекте была упаковка с 9 такими болтами (для сборки нужно 8 болтов, и 1 болт запасной). Найдите вероятность того, что в упаковке окажется:

а) ровно 1 бракованный болт;

б) 2 или больше бракованных болтов (придётся искать замену).

Результаты округлите до сотых.

2*. Сэр Сэмюель Пипс (1633—1703) однажды поинтересовался мнением сэра Исаака Ньютона, что вероятнее: хотя бы одна шестёрка при бросании 6 костей или хотя бы две шестёрки при бросании 12 костей. Ньютон подумал и дал правильный ответ. Вы тоже дайте — будьте как Ньютон.

8.1

1. Монету подбрасывают 10 раз. Известно, что всего решек и орлов случилось поровну. Найдите вероятность того, что в первых пяти бросках:

а) случилось ровно 2 решки.

б) случилось 2 решки или меньше.

2*. Стрелок стреляет по 8 мишеням. На каждую мишень ему даётся не более 2 попыток (если 2 раза промахнулся, нужно переходить к следующей мишени). Известно, что стрелок истратил 11 патронов. Найдите вероятность того, что из 5 первых мишеней ровно 3 он поразил первым же выстрелом.

8.2

1. На ветке дуба сидели вороны — 4 белых и 6 чёрных. Раздался удар грома, и восемь ворон, испугавшись, улетели. Известно, что пугливость ворон не зависит от их цвета. Какова вероятность того, что из оставшихся на дубе ворон ровно одна чёрная?

2*. На одном сайте, посвящённом лотерее «6 из 49», было написано, что в выигрышных наборах номеров 3 чётных и 3 нечётных номера встречаются чаще, чем любые другие комбинации чётных и нечётных. Поэтому для увеличения вероятности выигрыша нужно выбирать такие комбинации, в которых ровно 3 чётных номера и 3 нечётных.

а) Верно ли первое утверждение (3 чётных и 3 нечётных номера более вероятны, чем любое другое соотношение)?

б) Верно ли второе утверждение (выбирая 3 чётных и 3 нечётных номера, можно увеличить вероятность выигрыша по сравнению с чисто случайным выбором 6 номеров)?

8.3

1. Схема чемпионата мира по хоккею такова, что сначала 16 команд с помощью честного жребия разбивают на две группы A и B. В этом году состав команд такой же, как и в прошлом. Найдите вероятность того, что в группу A попадёт ровно 4 команды, которые в прошлом году тоже были в группе A. Результат округлите до тысячных.

2*. В аквариуме было 17 золотых рыбок и 18 меченосцев. Им было тесно, поэтому Алексей купил второй аквариум и отселил в него 15 случайно выбранных рыбок. Найдите наиболее вероятное число золотых рыбок среди отселённых.

9.1

1. Бросают две игральные кости. Случайная величина $S=\{$сумма выпавших очков$\}$. Какое событие более вероятно:

а) $S=4$ или $S=8$; б) $S=4$ или $S=10$?

2*. Аня вызвалась украсить класс к Новому году в стиле техно. Она хочет развесить в классе множество прямоугольников из фольгированного картона. Доверившись теории вероятностей, Аня занялась случайным дизайном. Она бросает игральную кость дважды, а затем вырезает из картона прямоугольник, у которого стороны (в сантиметрах) равны выпавшим числам. Пусть на первой кости выпадает число X, а на второй — число Y.

а) Сколько значений принимает случайная величина $Q=\{$площадь прямоугольника$\}$?

б) Выразите случайную величину Q через X и Y.

в) Найдите вероятность события $Q=12$.

9.2

1. Игральную кость бросают до тех пор, пока не выпадет шестёрка. Случайная величина $X=\{$число бросков$\}$. Какое из событий более вероятно:

а) $X=4$ или $X=8$; б) $X\leqslant 4$ или $X\leqslant 8$?

2*. Аня вызвалась украсить класс к Новому году в стиле диско. Она хочет развесить везде круги из разноцветного фольгированного картона случайных размеров. Аня занялась случайным дизайном: она бросает игральную кость. Сколько очков выпадет на игральной кости, такого радиуса (в сантиметрах) круг вырезает Аня. Пусть случайная величина X — выпавшее число очков.

а) Выразите через X случайную величину $Q=\{$площадь вырезанного круга$\}$.

б) Возможно ли событие $Q=12\pi$?

в) Найдите вероятность события $Q=25\pi$.

г) Составьте распределение случайной величины Q.

9.3

1. Игральную кость бросают дважды. Пусть случайная величина $M=\{$наибольшее из выпавших очков$\}$[1]. Найдите вероятность события $M=4$.

2*. По сигналу учителя физкультуры класс выстроился в случайном порядке — все 25 человек (все разного роста). Учитель встал перед строем и обнаружил, что видит не всех, а только тех, кто выше всех впередистоящих. А тех, кто меньше ростом, не видно — их закрывают более высокие. Определим случайную величину I_k для всех k от 1 до 25 равенством

$$I_k=\begin{cases}1, & \text{если школьника, стоящего в строю } k\text{-м по счёту, видно,}\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

а) Составьте распределение случайной величины I_k.

б) Выразите через величины I_k случайную величину $X=\{$количество тех, кого учитель физкультуры видит$\}$.

10.1

1. Случайная величина X имеет математическое ожидание $\mathrm{E}X$. Найдите математическое ожидание случайной величины $X-\mathrm{E}X$.

2*. Из отрезка натурального ряда от 1 до 20 выбрали 4 различных случайных числа. Найдите математическое ожидание суммы выбранных чисел.

[1] Если 2 раза выпало одно и то же число очков, то оно и считается наибольшим из выпавших. Например, если выпало (3; 3), то наибольшее значение 3.

10.2

1. Найдите $\mathrm{E}|X-\mathrm{E}X|$, если

$$X \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 0{,}01 & 0{,}24 & 0{,}5 & 0{,}24 & 0{,}01 \end{pmatrix}.$$

2*. В некотором случайном эксперименте n элементарных исходов. В этом эксперименте определены две случайные величины X и Y. Рассмотрим случайную величину $Z=\max(X, Y)$, равную наибольшей из величин X и Y. Докажите, что $\mathrm{E}Z \geqslant \mathrm{E}X$.

10.3

1. Найдите математическое ожидание случайной величины «наименьшее из очков, выпавших на 2 игральных костях».

2*. У Коли есть коллекция иностранных монет — всего 20 штук. Каждая монета лежит в специальном альбоме (кляссере) в своём подписанном кармашке (кармашков тоже 20). Однажды Колин младший брат достал монеты поиграть, а потом услышал, что Коля пришёл из школы, испугался и быстро распихал все 20 монет по кармашкам как попало. Найдите математическое ожидание случайной величины «число монет, оказавшихся в своём кармашке».

11.1

1. Докажите формулу $\mathrm{D}X = \mathrm{E}X^2 - \mathrm{E}^2X$.

2*. В некотором эксперименте наблюдают две независимые случайные величины: X со стандартным отклонением a и Y со стандартным отклонением b. Найдите стандартное отклонение случайной величины $X+Y$.

11.2

1. Симметричную монету бросают много раз. Найдите математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины $S = \{$число выпавших орлов$\}$. Какая доля значений этой случайной величины попадает в отрезок от $\mathrm{E}S - \sqrt{\mathrm{D}S}$ до $\mathrm{E}S + \sqrt{\mathrm{D}S}$, если сделано:

а) 100 бросков; б) 10 000 бросков.

Результаты выразите в процентах (округлите до десятых долей процента).

2*. В варианте ЕГЭ 49 вопросов. Верный ответ на каждый вопрос даёт 1 балл. Иванов даёт верные ответы на разные вопросы с разной вероятностью. Докажите, что стандартное отклонение случайной величины «суммарный балл Иванова» не больше чем 3,5.

11.3

1. Стрелок стреляет по 9 мишеням — по каждой один раз. Найдите стандартное отклонение случайной величины «число поражённых мишеней», если вероятность p попадания при одном выстреле равна:

а) 0,9; б) 0,1.

2*. Игральную кость бросают 10 раз. Случайная величина X_1 равна числу выпавших единиц, случайная величина X_2 равна числу выпавших двоек и т. д. до случайной величины X_6, которая равна числу выпавших шестёрок. Найдите дисперсию случайной величины $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_6$.

Самостоятельные работы

Первый номер в обозначении работы указывает параграф, к которому составлена работа. Вторая цифра — номер варианта.

1.1

1. Симметричную монету бросили 2 раза. Запишите перечислением элементарных исходов в фигурных скобках событие $A = \{$результат первого броска отличается от результата второго$\}$ и найдите вероятность этого события.

2. Симметричную монету бросили 3 раза. Найдите вероятность события «выпала хотя бы одна решка».

3. Правильную игральную кость бросают дважды. Отметьте в таблице эксперимента событие «сумма выпавших очков равна 6» и найдите вероятность этого события.

1.2

1. Симметричную монету бросили два раза. Запишите перечислением элементарных исходов в фигурных скобках событие $B = \{$результаты обоих бросков одинаковы$\}$ и найдите вероятность этого события.

2. Симметричную монету бросили три раза. Найдите вероятность события «орёл выпал ровно один раз».

3. Правильную игральную кость бросают дважды. Отметьте в таблице эксперимента событие «на первой кости выпало на одно очко меньше, чем на второй» и найдите вероятность этого события.

2.1

1. Покупатель в магазине выбирает электрическую лампочку. На полке 60 лампочек, 3 из них бракованные, остальные исправные. Найдите вероятность того, что первая случайно выбранная лампочка исправна.

2. В соревнованиях по фристайлу участвуют 5 спортсменов из Финляндии, 2 спортсмена из Японии, 3 спортсмена из России и 5 — из Норвегии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, выступающий вторым по счёту, окажется из России.

3. Клиент в офисе мобильной связи получает сим-карту с телефонным номером. Последние 3 цифры номера случайные. Найдите вероятность того, что эти 3 цифры идут подряд в убывающем порядке (например, 654).

2.2

1. Покупатель в магазине выбирает батарейку. На полке 50 батареек, 4 из них бракованные, остальные исправные. Найдите вероятность того, что первая случайно выбранная батарейка исправна.

2. В соревнованиях по прыжкам с трамплина участвуют 6 спортсменов из Финляндии, 5 спортсменов из Швеции, 4 спортсмена из России и 5 — из Дании. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, выступающий четвёртым по счёту, окажется из России.

3. Владелец автомобиля в ГИБДД получает свидетельство о регистрации автомобиля. Последние 3 цифры номера свидетельства случайные. Найдите вероятность того, что эти 3 цифры окажутся одинаковыми (например, 333).

3.1

1. Производятся испытания электрической лампочки на длительность непрерывного горения. Изобразите схематически на числовой прямой события $A = \{$лампочка прослужит не менее 1000 часов$\}$, $B = \{$лампочка прослужит не менее 1500 часов$\}$ и $C = \{$лампочка прослужит от 1800 до 2000 часов$\}$.

Расположите эти события в порядке возрастания вероятностей.

2. При изготовлении подшипников диаметром 50 мм вероятность того, что диаметр будет отличаться от заданного более чем на 0,02 мм, равна 0,013. Найдите вероятность того, что случайный подшипник будет иметь диаметр в пределах от 49,98 до 50,02 мм.

3. В небольшом городе работает кафе. Вероятность того, что в воскресенье вечером в кафе окажется одновременно не менее 15 посетителей, равна 0,48. Вероятность того, что посетителей будет не менее 25, равна 0,35. Найдите вероятность того, что в воскресенье вечером в кафе окажется одновременно от 15 до 24 посетителей.

3.2

1. Производятся испытания электрического мотора на длительность непрерывной работы. Изобразите схематически на числовой прямой события $A = \{$мотор прослужит не более 500 часов$\}$, $B = \{$мотор прослужит не более 700 часов$\}$ и $C = \{$мотор прослужит от 300 до 400 часов$\}$.

Расположите эти события в порядке убывания вероятностей.

2. При изготовлении труб диаметром 500 мм вероятность того, что диаметр будет отличаться от заданного не более чем на 1,2 мм, равна 0,915. Найдите вероятность того, что случайно выбранная такая труба будет иметь диаметр меньше 498,8 мм или больше 501,2 мм.

3. Автомат продаёт молоко. Вероятность того, что за сутки будет продано меньше 120 л молока, равна 0,13. Вероятность того, что будет продано меньше 150 л молока, равна 0,32. Найдите вероятность того, что за сутки будет продано меньше 150, но не меньше чем 120 л молока.

4.1

1. Даны два события A и B, и известны некоторые вероятности: $\mathrm{P}(A)=0{,}2$, $\mathrm{P}(B)=0{,}8$ и $\mathrm{P}(A\cap B)=0{,}15$. Во всех четырёх фигурах на диаграмме Эйлера расставьте вероятности соответствующих событий.

2. Симметричную монету бросают 3 раза. Рассмотрите события «в первый раз выпал орёл» и «решка выпала дважды».

а) Являются ли эти события независимыми?

б) Найдите вероятность объединения этих событий.

3. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в каждом одном автомате закончится кофе, равна 0,2. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,06. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется ровно в одном из автоматов.

4.2

1. Даны два события A и B, и известны некоторые вероятности: $\mathrm{P}(A)=0{,}6$, $\mathrm{P}(B)=0{,}3$ и $\mathrm{P}(A\cup B)=0{,}7$. Во всех четырёх фигурах на диаграмме Эйлера расставьте вероятности соответствующих событий.

2. Симметричную монету бросают 3 раза. Рассмотрите события «во второй раз выпал орёл» и «выпала ровно одна решка».

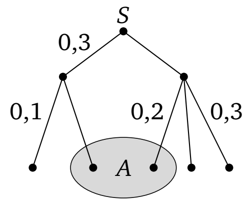
а) Являются ли эти события независимыми?

б) Найдите вероятность объединения этих событий.

3. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в каждом одном автомате закончится кофе, равна 0,2 независимо от работы другого автомата. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется ровно в одном из автоматов.

5.1

1. На рисунке изображено дерево некоторого случайного эксперимента с началом в точке S и показано событие A.



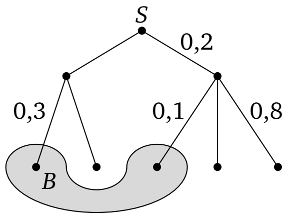
а) Около рёбер напишите недостающие вероятности.

б) Найдите вероятность события A.

2. В городе К. 55 % взрослого населения — женщины, 60 % из них работает. Найдите вероятность того, что случайно выбранный при опросе населения житель города К. оказался либо мужчиной, либо неработающей женщиной.

5.2

1. На рисунке изображено дерево некоторого случайного эксперимента с началом в точке S и показано событие B.



а) Около рёбер напишите недостающие вероятности.

б) Найдите вероятность события B.

2. В городе К. 48 % взрослого населения — мужчины, 75 % из них работает. Найдите вероятность того, что случайно выбранный при опросе населения житель города К. оказался либо женщиной, либо работающим мужчиной.

6.1

1. Найдите вероятность того, что при последовательных бросаниях монеты первая решка появится при пятом броске.

2. Производятся последовательные одинаковые и независимые испытания до тех пор, пока не наступит успех. В каждом отдельном испытании вероятность успеха равна $\frac{1}{3}$.

а) Постройте дерево этого эксперимента.

б) В дереве укажите событие «было сделано не меньше двух, но меньше 5 испытаний».

3. В условиях слабой мобильной связи Аня отправляет маме СМС. Телефон автоматически производит серию попыток отправить СМС до получения от станции подтверждения об успешной отправке. При каждой отдельной попытке СМС может отправиться с вероятностью 0,4. Найдите вероятность того, что СМС будет отправлена не позже чем на шестой попытке. Ответ округлите до тысячных.

6.2

1. Найдите вероятность того, что при последовательных бросаниях монеты первый орёл выпадет при четвёртом броске.

2 Производятся последовательные одинаковые и независимые испытания до тех пор, пока не наступит успех. В каждом отдельном испытании вероятность успеха равна $\frac{1}{7}$.

а) Постройте дерево этого эксперимента.

б) В дереве укажите событие «было сделано не меньше трёх, но меньше 6 испытаний».

3. В условиях слабой мобильной связи Катя отправляет маме СМС. Телефон автоматически производит серию попыток отправить СМС до получения от станции подтверждения об успешной отправке. При каждой отдельной попытке СМС может отправиться с вероятностью 0,3. Найдите вероятность того, что СМС будет отправлена не позже чем на пятой попытке. Ответ округлите до тысячных.

7.1

1. Симметричную монету бросают 4 раза.

а) Сколько элементарных исходов в этом эксперименте?

б) Найдите вероятность того, что орёл появится ровно 3 раза.

2. Производится серия из 6 последовательных независимых испытаний с вероятностью успеха p и вероятностью неудачи q в каждом испытании.

а) Выразите q через p.

б) Выразите через p и q вероятность того, что наступит менее двух успехов.

3. В школу на запись в первый класс пришли 9 будущих первоклассников. Считая, что появление мальчика и девочки равновероятно, найдите вероятность того, что мальчиков среди них ровно 6.

7.2

1. Симметричную монету бросают 5 раз.

а) Сколько элементарных исходов в этом эксперименте?

б) Найдите вероятность того, что решка появится ровно 3 раза.

2. Производится серия из четырёх последовательных независимых испытаний с вероятностью успеха p и вероятностью неудачи q в каждом испытании.

а) Выразите q через p.

б) Выразите через p и q вероятность того, что наступит менее двух успехов.

3. В школу на запись в первый класс по очереди приходят 8 будущих первоклассников. Считая, что появление мальчика и девочки равновероятно, найдите вероятность того, что девочек среди них ровно 5.

8.1

1. Монету подбросили 7 раз. Известно, что выпало 3 орла. Найдите вероятность того, что среди первых 5 бросков случилось ровно 2 орла.

2. В вазочке лежали 4 конфеты «Коровка» и 6 конфет «Маска». Провожая внука, бабушка сунула ему в карман 5 случайно выбранных конфет. Какова вероятность того, что среди них оказалось:

а) ровно две конфеты «Коровка»;

б) не более двух конфет «Маска»?

8.2

1. Монету подбросили 6 раз. Известно, что выпало 4 решки. Найдите вероятность того, что среди первых 3 бросков случилось ровно 2 решки.

2. В вазочке лежали 7 конфет «Алёнка» и 3 конфеты «Кара-Кум». Провожая внучку, бабушка сунула ей в карман 5 случайно выбранных конфет. Какова вероятность того, что среди них оказалось:

а) ровно две конфеты «Алёнка»;

б) не менее двух конфет «Кара-Кум»?

9.1

1. Дано распределение случайной величины: $Z \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 16 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & y \end{pmatrix}$.

а) Найдите неизвестную вероятность y.

б) Составьте распределение случайной величины $Y = Z - 5$.

2. В коробке 16 фломастеров, из них 6 зелёных, остальные красные. Из коробки не глядя вынимают один фломастер. Случайная величина I задана равенством

$$I = \begin{cases} 1, & \text{если фломастер красный,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Составьте распределение случайной величины I.

3. Симметричную монету бросают 4 раза. Рассмотрим случайную величину $W = \{$разность между числом выпавших орлов и числом выпавших решек$\}$.

а) Какие значения может принять величина W?

б) Найдите вероятность события $W = 2$.

в) Выразите через W случайную величину $X = \{$число выпавших орлов$\}$.

9.2

1. Дано распределение случайной величины: $Z \sim \begin{pmatrix} -12 & -3 & 2 \\ y & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

а) Найдите неизвестную вероятность y.

б) Составьте распределение случайной величины $Y = Z + 6$.

2. В коробке 20 воздушных шариков, из них 12 зелёных, остальные синие. Из коробки не глядя вынимают один шарик. Случайная величина I задана равенством

$$I = \begin{cases} 1, & \text{если шарик синий,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Составьте распределение случайной величины I.

3. Симметричную монету бросают 3 раза. Рассмотрим случайную величину $W = \{$разность между числом выпавших решек и числом выпавших орлов$\}$.

а) Какие значения может принять величина W?

б) Найдите вероятность события $W = -1$.

в) Выразите через W случайную величину $X = \{$число выпавших орлов$\}$.

10.1

1. Дано распределение случайной величины:

$$Z \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 16 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Найдите математическое ожидание случайной величины: а) Z; б) $3Z-1$.

2. Известны математические ожидания двух случайных величин X и Y:

$$\mathrm{E}X = 8, \quad \mathrm{E}Y = -3.$$

Найдите математическое ожидание случайной величины $X-3Y-2$.

3. Найдите математическое ожидание числа орлов, выпавших при 18 бросаниях симметричной монеты.

10.2

1. Дано распределение случайной величины:

$$Z \sim \begin{pmatrix} 6 & 8 & 9 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Найдите математическое ожидание случайной величины: а) Z; б) $2Z+3$.

2. Известны математические ожидания двух случайных величин X и Y:

$$\mathrm{E}X = -7, \quad \mathrm{E}Y = 4.$$

Найдите математическое ожидание случайной величины $3X-Y+2$.

3. Найдите математическое ожидание числа шестёрок, выпавших при 18 бросаниях игральной кости.

11.1

1. Найдите дисперсию случайной величины

$$Z \sim \begin{pmatrix} 4 & 7 & 10 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

2. В некотором эксперименте наблюдается случайная величина X с дисперсией $\mathrm{D}X = 4$.

Найдите дисперсию случайной величины $Y = \frac{1}{2}X - 9$.

3. В случайном эксперименте монету бросают 36 раз. Найдите:

а) дисперсию; б) стандартное отклонение случайной величины «число выпавших решек».

11.2

1. Найдите дисперсию случайной величины

$$Z \sim \begin{pmatrix} 4 & 7 & 10 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

2. В некотором эксперименте наблюдается случайная величина X с дисперсией $\mathrm{D}X = 9$.

Найдите дисперсию случайной величины $Y = 5 - \frac{1}{3}X$.

3. В случайном эксперименте монету бросают 64 раза. Найдите:

а) дисперсию; б) стандартное отклонение случайной величины «число выпавших орлов».

Контрольные работы

КI.1. «Случайные события»

Вариант 1 (базовый уровень)

1. Симметричную монету бросили 3 раза. Запишите событие $A = \{$результаты второго и третьего бросаний одинаковы$\}$ перечислением благоприятствующих элементарных исходов и найдите вероятность этого события.

2. В случайном эксперименте 25 элементарных равновозможных событий. Найдите вероятность события A, если этому событию благоприятствуют 17 элементарных событий.

3. Правильную игральную кость бросают дважды. В таблице эксперимента выделите элементарные события, благоприятствующие событию $B = \{$сумма выпавших очков равна 8 или 9$\}$. Найдите вероятность этого события.

		Вторая кость					
		1	2	3	4	5	6
Первая кость	1						
	2						
	3						
	4						
	5						
	6						

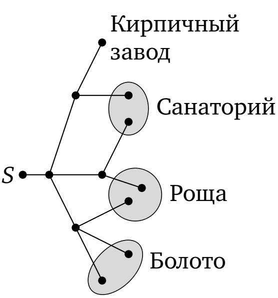
4. Вероятность того, что атмосферное давление в некоторой местности в некоторый момент окажется выше 738 мм рт. ст., равна 0,84. Найдите вероятность того, что атмосферное давление окажется 738 мм рт. ст. или ниже.

5. В службе коммунальных услуг стоят два платёжных терминала. Каждый из них может оказаться неисправен с вероятностью 0,1 независимо от другого терминала. Пусть событие $A = \{$первый терминал неисправен$\}$, а событие $B = \{$второй терминал неисправен$\}$.

а) Опишите словами событие $\bar{A} \cap B$ и изобразите его на диаграмме Эйлера.

б) Найдите вероятность события $A \cup B$.

6*. Сергей Васильевич гуляет по окрестностям своей дачи. Он выходит из точки S и на каждой развилке с равными шансами выбирает следующую дорожку, но не возвращается обратно. Схема дорожек показана на рисунке.



а) Найдите вероятность того, что Сергей Васильевич придёт к санаторию.

б) Какова вероятность того, что Сергей Васильевич придёт либо в рощу, либо в болото?

КI.2. «Случайные события»

Вариант 2 (базовый уровень)

1. Симметричную монету бросили 3 раза. Запишите перечислением благоприятствующих элементарных исходов событие $A=\{$результаты первого и третьего бросаний различны$\}$ и найдите вероятность этого события.

2. В случайном эксперименте 20 элементарных равновозможных событий. Найдите вероятность события B, если этому событию благоприятствуют 13 элементарных событий.

3. Правильную игральную кость бросают дважды. В таблице эксперимента выделите элементарные события, благоприятствующие событию $B=\{$сумма выпавших очков равна 6 или 7$\}$. Найдите вероятность этого события.

Первая кость \ Вторая кость	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

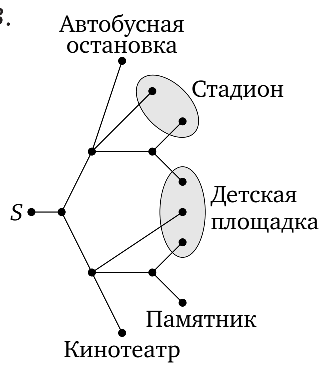
4. Вероятность того, что влажность воздуха в некоторой местности в некоторый момент окажется ниже 45 %, равна 0,76. Найдите вероятность того, что влажность окажется 45 % или выше.

5. В кинотеатре стоят два автомата, продающие попкорн. Каждый из них может оказаться неисправен с вероятностью 0,2 независимо от другого автомата. Пусть событие $A=\{$первый автомат неисправен$\}$, а событие $B=\{$второй автомат неисправен$\}$.

а) Опишите словами событие $A\cap\overline{B}$ и изобразите его на диаграмме Эйлера.

б) Найдите вероятность события $A\cup B$.

6*. Ольга Павловна гуляет по парку. Она выходит из точки S и на каждой развилке с равными шансами выбирает следующую дорожку, но не возвращается обратно. Схема дорожек показана на рисунке.



а) Найдите вероятность того, что Ольга Павловна придёт к стадиону.

б) Какова вероятность того, что Ольга Павловна окажется либо на детской площадке, либо у кинотеатра?

КI.3. «Случайные события»

Вариант 3

1. На соревнования по прыжкам в воду приехало множество спортсменов, среди них Иванов, Петров и Александров. Порядок выступления спортсменов определяется жребием. Какова вероятность того, что Петров будет прыгать позже Иванова, но раньше, чем Александров?

2. Правильную игральную кость бросают 2 раза. Найдите вероятность события $A = \{$сумма выпавших очков не меньше, чем 6$\}$.

3. Сергей получает водительское удостоверение. Последние 4 цифры номера удостоверения случайные. Найдите вероятность того, что последние 4 цифры идут подряд по возрастанию или убыванию (например, 0123 или 7654).

4. В бассейне проверяют температуру воды. Рассмотрите события:

$A = \{$температура воды ниже 30°C$\}$;

$B = \{$температура воды от 18°C до 25°C$\}$;

$C = \{$температура воды не выше 25°C$\}$;

$D = \{$температура воды ниже 18°C$\}$.

а) Расположите события A, B и C в порядке возрастания их вероятностей.

б) Найдите вероятность события C, если $P(B) = 0{,}76$ и $\mathrm{P}(D) = 0{,}05$.

5. Даны два независимых события A и B, и известны их вероятности: $\mathrm{P}(A) = 0{,}4$ и $\mathrm{P}(B) = 0{,}6$.

а) Во всех четырёх фигурах на диаграмме Эйлера расставьте вероятности.

б) Найдите вероятность события $\bar{A} \cup B$.

6. Автоматическая линия изготавливает видеокамеры для охранных систем. Известно, что 98 % готовых камер, сошедших с линии, исправны. Из неисправных камер 96 % обнаруживаются при контроле качества продукции и отбраковываются. Однако система контроля по ошибке бракует 1 % исправных камер. Камеры, которые не отбракованы, упаковываются и поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная камера, которая сошла с автоматической линии, окажется отбракованной.

КI.4. «Случайные события»

Вариант 4

1. В забеге на 100 метров одновременно участвует несколько спортсменов, среди них бегуны Алексеев, Борисов и Владимиров. Дорожки, по которым бегут спортсмены, определяются жребием. Какова вероятность того, что номер дорожки Борисова меньше, чем номера дорожек Алексеева и Владимирова?

2. Правильную игральную кость бросают 2 раза. Найдите вероятность события $A=\{$сумма выпавших очков не больше чем 6$\}$.

3. Сергей получает в банке кредитную карту. Последние 4 цифры номера карты — случайные. Найдите вероятность того, что из них две первые различны, а потом эти цифры повторяются (например, 0505 или 3636).

4. В бассейне проверяют содержание хлора в воде. Рассмотрите события:

$A=\{$содержание хлора в воде не менее 0,9 мг/л$\}$;

$B=\{$содержание хлора в воде не менее 0,7 мг/л$\}$;

$C=\{$содержание хлора в воде от 0,9 до 1,2 мг/л$\}$;

$D=\{$содержание хлора в воде выше 1,2 мг/л$\}$.

а) Расположите события A, B и D в порядке возрастания их вероятностей.

б) Найдите вероятность события D, если $\mathrm{P}(A)=0{,}68$ и $\mathrm{P}(C)=0{,}59$.

5. Даны два независимых события A и B, и их вероятности: $\mathrm{P}(A)=0{,}2$ и $\mathrm{P}(B)=0{,}7$.

а) Во всех четырёх фигурах на диаграмме Эйлера расставьте вероятности;

б) Найдите вероятность события $A\cup\overline{B}$.

6. Автоматическая линия изготавливает блоки питания для компьютеров. Известно, что 72 % готовых блоков, сошедших с линии, исправны. Из неисправных блоков 98 % обнаруживаются при контроле качества продукции и отбраковываются. Однако система контроля по ошибке бракует 2 % исправных блоков. Те блоки, которые не отбракованы, поступают в цех сборки компьютеров. Найдите вероятность того, что случайно выбранный сошедший с автоматической линии блок поступит в цех сборки. Результат округлите до тысячных.

КII.1. «Эксперименты с последовательными испытаниями»

Вариант 1

1. Симметричную монету бросают до тех пор, пока не выпадет орёл. Найдите вероятность того, что будет сделано 3 броска.

2. Производится пять одинаковых независимых испытаний с вероятностью успеха p в каждом испытании и вероятностью неудачи q.

а) Выразите через p и q вероятность события $A_2 = \{$случилось ровно 2 успеха$\}$.

б) Вычислите эту вероятность, если $p = 0{,}4$. Округлите результат до тысячных.

3. В школьном кружке 9 участников. С вероятностью 0,1, независимо от других, каждый из них может пропустить занятие кружка по болезни или по другой причине. Найдите вероятность того, что на следующем занятии кружка будет:

а) ровно 7 участников;

б) хотя бы 8 участников.

Результаты округлите до тысячных.

4. Производятся последовательные одинаковые и независимые испытания до тех пор, пока не наступит успех. В каждом отдельном испытании вероятность успеха равна 0,2.

а) Постройте дерево этого эксперимента и укажите в дереве событие «успех наступил не позже четвёртого испытания».

б) Найдите вероятность этого события.

5. Монету подбрасывают 8 раз. Известно, что орёл выпал всего 5 раз. Найдите вероятность того, что в четырёх первых бросаниях орёл случился 3 раза.

6. В кошельке 5 монет по 10 рублей, 3 монеты по 5 рублей и 2 монеты по 2 рубля. Анна не глядя достаёт 6 монет. Какова вероятность того, что среди них окажутся ровно 3 монеты по 10 рублей и ровно 2 монеты по 5 рублей?

КII.2. «Эксперименты с последовательными испытаниями»

Вариант 2

1. Симметричную монету бросают до тех пор, пока не выпадет орёл. Найдите вероятность того, что будет сделано 4 броска.

2. Производится пять одинаковых независимых испытаний с вероятностью успеха p в каждом испытании и вероятностью неудачи q.

а) Выразите через p и q вероятность события $B_3 = \{$случилось ровно 3 неудачи$\}$.

б) Вычислите эту вероятность, если $p = 0{,}6$. Округлите результат до сотых.

3. В школьном кружке 8 участников. С вероятностью 0,2, независимо от других, каждый из них может пропустить занятие кружка по болезни или по другой причине. Найдите вероятность того, что на следующем занятии кружка будет:

а) ровно 6 участников;

б) хотя бы 7 участников.

Результаты округляйте до тысячных.

4. Производятся последовательные одинаковые и независимые испытания до тех пор, пока не наступит успех. В каждом отдельном испытании вероятность успеха равна 0,3.

а) Постройте дерево этого эксперимента и укажите в дереве событие «успех наступил не раньше четвёртого испытания».

б) Найдите вероятность этого события.

5. Игральную кость подбрасывают 9 раз. Известно, что шестёрка выпала ровно 3 раза. Найдите вероятность того, что в 5 первых бросаниях шестёрка выпала ровно 2 раза.

6. В кошельке 4 монеты по 10 рублей, 2 монеты по 5 рублей и 4 монеты по 2 рубля. Сергей не глядя достаёт 5 монет. Какова вероятность того, что среди них окажутся ровно 2 монеты по 10 рублей и ровно 2 монеты по 2 рубля?

КIII.1. Случайные величины

Вариант 1

1. Дано распределение случайной величины:

$$X \sim \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & p \end{pmatrix}.$$

а) Найдите неизвестную вероятность p.

б) Составьте распределение случайной величины $Y = 2X - 1$.

2. Случайная величина X задана распределением. Найдите $\mathrm{E}X$.

а) $\begin{pmatrix} -3 & 3 & 5 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}1 \end{pmatrix}$.

3. Даны случайные величины X и Y и их математические ожидания: $\mathrm{E}X = -2$, $\mathrm{E}Y = 5$. Найдите математическое ожидание случайной величины:

а) $Z = X + Y$; б) $U = \frac{1}{2}X - \frac{1}{5}Y + 4$.

4. Стрелок стреляет по очереди по 20 мишеням. Вероятность поражения каждой мишени равна 0,4. Найдите математическое ожидание числа поражённых мишеней.

5. Найдите дисперсию случайной величины, имеющей распределение

$$Y \sim \begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 & 5 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

6. Страховая компания в некотором регионе страхует владельцев автомобилей. Цена годового страхового полиса равна 30 тысяч рублей. Исследования показали, что в течение года владелец автомобиля попадает в мелкую аварию с вероятностью 0,1 и средняя сумма страховой выплаты при этом равна 50 тысяч рублей. С вероятностью 0,03 автомобилист попадает в серьёзную аварию, и средняя сумма выплаты при этом 700 тысяч рублей. Найдите математическое ожидание случайной величины «средний доход страховой компании от продажи одного полиса».

КIII.2. «Случайные величины»

Вариант 2

1. Дано распределение случайной величины:

$$X \sim \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ p & 0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

а) Найдите неизвестную вероятность p.

б) Составьте распределение случайной величины $Y = 3X + 2$.

2. Случайная величина X задана распределением. Найдите $\mathrm{E}X$.

а) $\begin{pmatrix} -4 & 3 & 4 \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{7}{10} \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.

3. Даны случайные величины X и Y и их математические ожидания: $\mathrm{E}X = 6$, $\mathrm{E}Y = -5$. Найдите математическое ожидание случайной величины:

а) $Z = X - Y$; б) $U = \frac{1}{3}X + \frac{1}{5}Y + 6$.

4. Баскетболист на тренировке бросает мяч в корзину 40 раз. Вероятность попадания при каждом броске равна 0,7. Найдите математическое ожидание случайной величины «число попаданий».

5. Найдите дисперсию случайной величины, имеющей распределение

$$Y \sim \begin{pmatrix} -5 & -3 & -1 & 1 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

6. Страховая компания в некотором регионе страхует владельцев автомобилей. Цена годового страхового полиса равна 40 тысяч рублей. Исследования показали, что в течение года владелец автомобиля попадает в мелкую аварию с вероятностью 0,1 и средняя сумма страховой выплаты при этом равна 60 тысяч рублей. С вероятностью 0,04 автомобилист попадает в серьёзную аварию, и средняя сумма выплаты при этом 800 тысяч рублей. Найдите математическое ожидание случайной величины «средний доход страховой компании от продажи одного полиса».

Справочник

Благоприятствующее событию *A* элементарное событие — это *элементарное событие* в *случайном эксперименте*, при наступлении которого наступает событие A. Можно также сказать, что событие A состоит из благоприятствующих ему элементарных событий.

Пример. Событию «выпала хотя бы одна решка» при двукратном бросании монеты благоприятствуют элементарные события

$$\{\text{РО, ОР, РР}\}.$$

Элементарное событие ОО событию «хотя бы одна решка» не благоприятствует.

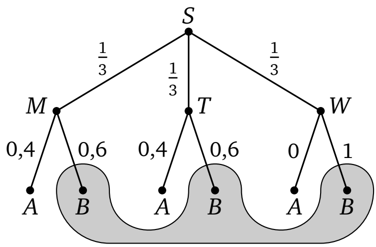
Вероятность случайного события — числовая мера правдоподобности события, наступающего в ходе *случайного эксперимента*. Вероятность — число от 0 до 1. Вероятность случайного события A равна сумме вероятностей элементарных событий, благоприятствующих событию A.

Элементарным событиям эксперимента вероятности назначают исходя из того, как эксперимент устроен. Иногда считают, что все элементарные события имеют одинаковые вероятности (равновозможны) в силу симметрии. Например, при бросании правильной игральной кости никакая грань не имеет преимуществ перед другой. Поэтому всем шести элементарным событиям этого эксперимента назначают вероятность $\frac{1}{6}$. Во многих жизненных экспериментах вероятности элементарным событиям назначают приближённо с помощью длительных наблюдений частот этих событий.

Дерево случайного эксперимента (дерево вероятностей). Многие эксперименты, где возникает несколько взаимосвязанных событий, удобно представить в виде ветвящегося процесса. Изображать это лучше всего с помощью графа — дерева, растущего из вершины S (начало). От этой вершины направляются рёбра к возможным событиям, дальше — к другим событиям и т. д. Около каждого ребра можно подписать условную вероятность соответствующего события.

Поясним на примере, как строится дерево эксперимента и как с помощью деревьев решаются задачи.

Пример. Учёный приехал в Гамбург на конференцию. Доклады проводятся в двух корпусах университета A и B в течение трёх дней с понедельника по среду. Доклад нашего учёного с равными вероятностями может быть назначен на любой из трёх дней; 40 % всех докладов в понедельник и 40 % всех докладов во вторник проводятся в корпусе А. В среду все доклады проходят в корпусе В, поскольку в А готовится церемония закрытия конференции. Найдите вероятность того, что доклад нашего учёного назначен в корпусе В.



Пример решения. Построение дерева видно из рисунка. Мы не рисуем стрелки, считая, что все рёбра направлены вниз. Удобно обозначать одной и той же буквой разные вершины, если они означают одно и то же событие.

Элементарными событиями в этом эксперименте являются цепочки рёбер, ведущие от начальной вершины S к конечным вершинам A и B. Например, элементарное событие SMA состоит в том, что доклад назначен на понедельник (M) и проходит в корпусе А.

Вероятности, надписанные около рёбер, — *условные*. Например, вероятность 0,4 у ребра TA — это вероятность того, что доклад будет в корпусе А, при условии, что он во вторник (T). Поэтому сумма вероятностей в каждой точке ветвления равна 1.

Событию B благоприятствуют три элементарных события — это цепочки SMB, STB и SWB. Вероятность каждой легко найти, пользуясь правилом умножения:

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(SMB) + \mathrm{P}(STB) + \mathrm{P}(SWB) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}6 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}6 + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{11}{15}.$$

Более сложные эксперименты требуют более сложных деревьев, но суть не меняется.

Дисперсия случайной величины — *математическое ожидание* квадрата отклонения этой случайной величины от её математического ожидания. Коротко говоря, дисперсия — это средний квадрат отклонения:

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)^2.$$

Часто для вычисления дисперсии применяется формула

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}X^2 - \mathrm{E}^2 X,$$

которая получается из определения непосредственными преобразованиями (см. задачу 1 из работы И11.1 на с. 147).

Для дисперсии верны следующие свойства:

1°) $D(aX+b)=a^2DX$ (a и b — произвольные числа);

2°) для *независимых случайных величин* $D(X+Y)=DX+DY$.

Не все случайные величины имеют дисперсию (например, не имеют дисперсии те величины, которые не имеют математического ожидания).

Закон больших чисел — теоремы, утверждающие разные виды *статистической устойчивости*. Наиболее простая и исторически первая из них — теорема Бернулли: с ростом числа одинаковых *испытаний* вероятность малого отличия между частотой *успеха* и его вероятностью стремится к единице. Проще, но не совсем строго можно сказать, что частота успеха статистически устойчива и стремится к вероятности этого события.

Испытание (испытание Бернулли) — *случайный эксперимент*, в котором может наступить один из двух элементарных исходов. Эти исходы условно называют *успехом* и *неудачей*. Пример испытания Бернулли — бросание одной монеты.

Очень многие эксперименты можно свести к последовательности независимых и одинаковых испытаний.

Математическое ожидание случайной величины. Если дискретная случайная величина X имеет *распределение*

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \ldots & p_n \end{pmatrix},$$

то математическое ожидание EX вычисляется по формуле

$$EX = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \ldots + x_np_n.$$

Аналогичная сумма, но бесконечная, получается, если количество значений случайной величины бесконечно:

$$EX = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \ldots + x_np_n + \ldots$$

Бывают случайные величины, у которых математическое ожидание не существует (придумайте пример).

Если случайные величины X и Y имеют математические ожидания, то верны следующие свойства математических ожиданий:

1°) $E(aX+b)=aEX+b$ (a и b — произвольные числа), в частности, $Eb=b$;

2°) $E(X+Y)=EX+EY$;

3°) если случайные величины *независимы*, то $E(XY)=EX\cdot EY$.

Независимые случайные величины. Проводится эксперимент, в котором наблюдаются две случайные величины X и Y. Если никакое значение одной из величин не влияет на вероятности значений другой, то такие величины называют независимыми.

Независимые события. События A и B независимы, если наступление одного из них не влияет на вероятность другого. Для независимых событий *правило умножения вероятностей* принимает вид

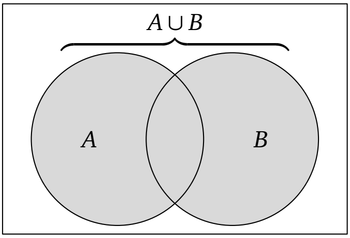
$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B).$$

Иногда это равенство принимают за определение двух независимых событий.

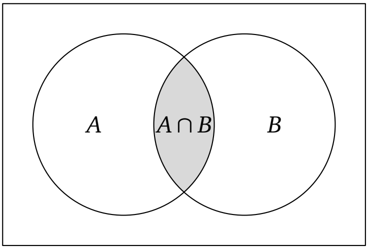
Несовместные события — события, пересечение которых пусто. Несовместные события не имеют общих элементарных исходов. Если события несовместны, то вероятность их объединения равна сумме их вероятностей (*формула сложения* для несовместных событий):

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B).$$

Объединением событий A и B называется событие $A\cup B$, которое происходит, когда наступило хотя бы одно из событий A и B. Иными словами, объединению событий A и B благоприятствуют элементарные события, которые благоприятствуют хотя бы одному из этих событий: или A, или B, или обоим. Удобно показать объединение двух событий на диаграмме Эйлера.



Пересечением событий A и B называется событие, которое происходит, когда наступают оба эти события. Иными словами, пересечению $A\cap B$ благоприятствуют элементарные события, которые благоприятствуют обоим событиям A и B. На диаграмме Эйлера пересечение изображается общей частью фигур, соответствующих событиям A и B.



Правило умножения вероятностей. Предположим, что вероятность события A равна $\mathrm{P}(A)$. Вероятность события B при условии, что A наступило, обозначим $\mathrm{P}(B|A)$. Тогда вероятность пересечения событий равна

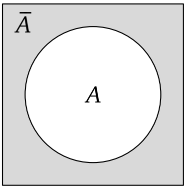
$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(B|A) \cdot \mathrm{P}(A).$$

Точно так же

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A|B) \cdot \mathrm{P}(B).$$

Когда при решении задач мы умножаем вероятности вдоль цепочек в *дереве случайного эксперимента*, мы пользуемся этим правилом.

Противоположное событие. Пусть в эксперименте определено событие A. Если оно не случилось, то говорят, что случилось противоположное событие $\bar{A}$. Строго говоря, событию $\bar{A}$ благоприятствуют те и только те элементарные исходы эксперимента, которые не благоприятствуют событию A. Диаграмма для противоположного события изображена на рисунке.



Распределение вероятностей — соответствие между значениями *случайной величины* и вероятностями этих значений. Распределение может быть задано таблицей, диаграммой или графиком, формулой, словесным описанием в зависимости от природы случайной величины. Если две случайные величины имеют одно и то же распределение, это не значит, что они совпадают. Например, при двукратном бросании кости число очков, выпавшее в первый раз, и число очков, выпавшее во второй раз, чаще всего не совпадают. Значит, это разные случайные величины, но они имеют одинаковое распределение.

Случайная величина — величина, значение которой определяется исходом случайного эксперимента. Дискретная случайная величина — та, у которой значения являются отдельными точками на числовой прямой.

Пример дискретной случайной величины — «число очков, выпавшее на игральной кости». Эта величина имеет шесть натуральных значений. Другой пример — число попыток до достижения первого успеха. Здесь значения — все натуральные числа.

Значения непрерывной величины образуют числовые промежутки. Например, температура в комнате может иметь любое значение из некоторого интервала и изменяется плавно.

Случайный выбор — выбор без предпочтений. Если есть какой-то набор (совокупность) предметов, то при случайном выборе каждый предмет (пара, тройка предметов и т. п.) может быть выбран с равными шансами.

Случайный эксперимент (случайный опыт) — условия, в которых наблюдаются случайные события. Задать случайный эксперимент — значит описать условия, в которых мы наблюдаем *элементарные события*, описать сами элементарные события и назначить их вероятности. Например, эксперимент «двукратное бросание монеты» предполагает четыре равновозможных элементарных события ОО, ОР, РО и РР. Иногда случайный эксперимент проводят люди. Многие случайные эксперименты создаёт природа.

Стандартное отклонение случайной величины — арифметический квадратный корень из *дисперсии* случайной величины $\sqrt{DX}$.

Треугольник Паскаля. Таблица с *числами сочетаний* C_n^k.

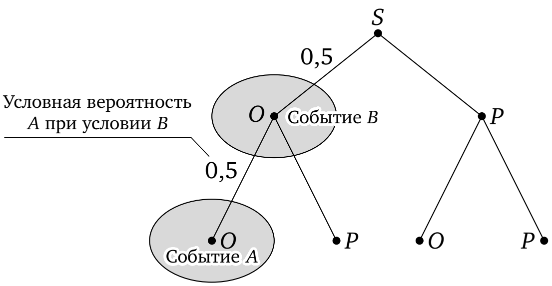
n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Треугольник Паскаля до $n = 10$

Столбцы и строки треугольника нумеруются начиная с нуля. Например, $C_6^4 = 15$ — это число в шестой строке в четвёртом столбце. Два соседних числа в одной строке в сумме дают число следующей строки: $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.

Условная вероятность события *A* при условии *B* — это вероятность события A в предположении, что событие B наступило.

Пример. При двукратном бросании монеты событие $A = \{$два раза выпал орёл$\}$ имеет вероятность 0,25. Но если при первом броске орёл уже случился (событие B), то теперь событие A имеет вероятность (условную) 0,5, поскольку нужно, чтобы выпал ещё только один орёл. Таким образом, наступление события B повлияло на вероятность события A, увеличив её с 0,25 до 0,5. На рисунке показано дерево этого эксперимента. Условные вероятности удобно подписывать около рёбер дерева.



Успех и неудача — два взаимоисключающих *элементарных события* в одном *испытании*.

Формула Бернулли — формула, по которой вычисляется вероятность ровно k успехов в серии из n одинаковых и независимых *испытаний Бернулли*:

$$C_n^k p^k q^{n-k},$$

где p — вероятность успеха в каждом отдельном испытании, а $q = 1 - p$ — вероятность неудачи.

Формула сложения вероятностей выражает вероятность объединения событий через их вероятности и вероятность их пересечения:

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B).$$

Для *несовместных* событий формула принимает более простой вид:

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B).$$

Число сочетаний C_n^k — число способов выбрать k предметов из множества, в котором n предметов. Например, нужно выбрать две буквы из букв А, Б и В. Существует три варианта: АБ, АВ и БВ. Поэтому $C_3^2 = 3$.

Число сочетаний можно описать иначе — это число последовательностей длины n, в которой ровно k успехов и $n-k$ неудач. Например, существует ровно шесть последовательностей длины 4 из двух успехов и двух неудач:

УУНН, УНУН, УННУ, НУУН, НУНУ и ННУУ.

Поэтому $C_4^2 = 6$.

Формула числа сочетаний:

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!},$$

где $n!$ — факториал числа n, т. е. произведение натуральных чисел от 1 до n. Факториал нуля определяется отдельно: $0! = 1$.

При не очень больших n число сочетаний удобно найти в специальной таблице: *треугольнике Паскаля*.

Примерная программа в части статистики и теории вероятностей

ОДОБРЕНА решением федерального учебно-методического объединения по общему образованию (протокол от 8 апреля 2015 г. № 1/15)[1].

Примерная основная образовательная программа основного общего образования (фрагмент)

1. Целевой раздел примерной основной образовательной программы

5—6 классы

Выпускник научится в 5—6 классах (для использования в повседневной жизни и обеспечения возможности успешного продолжения образования на базовом уровне):

- представлять данные в виде таблиц, диаграмм,
- читать информацию, представленную в виде таблицы, диаграммы.

Выпускник получит возможность научиться в 5—6 классах (для обеспечения возможности успешного продолжения образования на базовом и углублённом уровнях)[2]

- *оперировать понятиями*: *столбчатые и круговые диаграммы, таблицы данных, среднее арифметическое,*
- *извлекать, информацию, представленную в таблицах, на диаграммах*;
- *составлять таблицы, строить диаграммы на основе данных.*

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

- *извлекать, интерпретировать и преобразовывать информацию, представленную в таблицах и на диаграммах, отражающую свойства и характеристики реальных процессов и явлений.*

---

[1] В редакции протокола № 3/15 от 28.10.2015 федерального учебно-методического объединения по общему образованию.

[2] Курсивом в тексте выделен материал, который подлежит изучению, но не включается в требования к уровню подготовки выпускников.

7—9 классы

Выпускник научится в 7—9 классах (для использования в повседневной жизни и обеспечения возможности успешного продолжения образования на базовом уровне):

- иметь представление о статистических характеристиках, вероятности случайного события, комбинаторных задачах;
- решать простейшие комбинаторные задачи методом прямого и организованного перебора;
- представлять данные в виде таблиц, диаграмм, графиков;
- читать информацию, представленную в виде таблицы, диаграммы, графика;
- определять основные статистические характеристики числовых наборов;
- оценивать вероятность события в простейших случаях;
- иметь представление о роли закона больших чисел в массовых явлениях.

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

- оценивать количество возможных вариантов методом перебора;
- иметь представление о роли практически достоверных и маловероятных событий;
- сравнивать основные статистические характеристики, полученные в процессе решения прикладной задачи, изучения реального явления;
- оценивать вероятность реальных событий и явлений в несложных ситуациях.

Выпускник получит возможность научиться в 7—9 классах для обеспечения возможности успешного продолжения образования на базовом и углублённом уровнях:

- *оперировать понятиями*: *столбчатые и круговые диаграммы, таблицы данных, среднее арифметическое, медиана, наибольшее и наименьшее значения выборки, размах выборки, дисперсия и стандартное отклонение, случайная изменчивость*;
- *извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках*;
- *составлять таблицы, строить диаграммы и графики на основе данных*;
- *оперировать понятиями*: *факториал числа, перестановки и сочетания, треугольник Паскаля*;

- *применять правило произведения при решении комбинаторных задач;*
- *оперировать понятиями: случайный опыт, случайный выбор, испытание, элементарное случайное событие (исход), классическое определение вероятности случайного события, операции над случайными событиями;*
- *представлять информацию с помощью кругов Эйлера;*
- *решать задачи на вычисление вероятности с подсчётом количества вариантов с помощью комбинаторики.*

Выпускник получит возможность научиться в 7—9 классах для успешного продолжения образования на углублённом уровне:

- свободно оперировать понятиями: столбчатые и круговые диаграммы, таблицы данных, среднее арифметическое, медиана, наибольшее и наименьшее значения выборки, размах выборки, дисперсия и стандартное отклонение, случайная изменчивость;
- выбирать наиболее удобный способ представления информации, адекватный её свойствам и целям анализа;
- вычислять числовые характеристики выборки;
- свободно оперировать понятиями: факториал числа, перестановки, сочетания и размещения, треугольник Паскаля;
- свободно оперировать понятиями: случайный опыт, случайный выбор, испытание, элементарное случайное событие (исход), классическое определение вероятности случайного события, операции над случайными событиями, основные комбинаторные формулы;
- знать примеры случайных величин и вычислять их статистические характеристики;
- использовать формулы комбинаторики при решении комбинаторных задач;
- решать задачи на вычисление вероятности в том числе с использованием формул.

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

- представлять информацию о реальных процессах и явлениях способом, адекватным её свойствам и цели исследования;
- анализировать и сравнивать статистические характеристики выборок, полученных в процессе решения прикладной задачи, изучения реального явления, решения задачи из других учебных предметов;
- оценивать вероятность реальных событий и явлений в различных ситуациях.

2. Содержательный раздел примерной основной образовательной программы основного общего образования

Содержание курсов математики 5—6 классов, алгебры и геометрии 7—9 классов объединено как в исторически сложившиеся линии (числовая, алгебраическая, геометрическая, функциональная и др.), так и в относительно новые (стохастическая линия, «реальная математика»). Отдельно представлены линия сюжетных задач, историческая линия.

Содержание курса математики в 5—6 классах

Среднее арифметическое чисел. Среднее арифметическое двух чисел. Изображение среднего арифметического двух чисел на числовой прямой. Решение практических задач с применением среднего арифметического. *Среднее арифметическое нескольких чисел*.

Диаграммы. Столбчатые и круговые диаграммы. Извлечение информации из диаграмм. *Изображение диаграмм по числовым данным*.

Содержание курса математики в 7—9 классах

Статистика. Табличное и графическое представление данных, столбчатые и круговые диаграммы, графики, применение диаграмм и графиков для описания зависимостей реальных величин, извлечение информации из таблиц, диаграмм и графиков. Описательные статистические показатели числовых наборов: среднее арифметическое, *медиана*, наибольшее и наименьшее значения. Меры рассеивания: размах, *дисперсия и стандартное отклонение*.

Случайная изменчивость. Изменчивость при измерениях. *Решающие правила. Закономерности в изменчивых величинах*.

Случайные события. Случайные опыты (эксперименты), элементарные случайные события (исходы). Вероятности элементарных событий. События в случайных экспериментах и благоприятствующие элементарные события. Вероятности случайных событий. Опыты с равновозможными элементарными событиями. Классические вероятностные опыты с использованием монет, кубиков. *Представление событий с помощью диаграмм Эйлера. Противоположные события, объединение и пересечение событий. Правило сложения вероятностей. Случайный выбор. Представление эксперимента в виде дерева. Независимые события. Умножение вероятностей* *независимых событий. Последовательные независимые испытания.* Представление о независимых событиях в жизни.

Элементы комбинаторики. *Правило умножения, перестановки, факториал числа. Сочетания и число сочетаний. Формула числа сочетаний. Треугольник Паскаля. Опыты с большим числом равновозможных элементарных событий. Вычисление вероятностей в опытах с применением комбинаторных формул. Испытания Бернулли. Успех и неудача. Вероятности событий в серии испытаний Бернулли.*

Случайные величины. *Знакомство со случайными величинами на примерах конечных дискретных случайных величин. Распределение вероятностей. Математическое ожидание. Свойства математического ожидания. Понятие о законе больших чисел. Измерение вероятностей. Применение закона больших чисел в социологии, страховании, в здравоохранении, обеспечении безопасности населения в чрезвычайных ситуациях.*

Содержание курса математики в 7—9 классах (углублённый уровень)

Статистика. Табличное и графическое представление данных, столбчатые и круговые диаграммы, извлечение нужной информации. Диаграммы рассеивания. Описательные статистические показатели: среднее арифметическое, медиана, наибольшее и наименьшее значения числового набора. Отклонение. Случайные выбросы. Меры рассеивания: размах, дисперсия и стандартное отклонение. Свойства среднего арифметического и дисперсии. Случайная изменчивость. Изменчивость при измерениях. Решающие правила. Закономерности в изменчивых величинах.

Случайные опыты и случайные события. Случайные опыты (эксперименты), элементарные случайные события (исходы). Вероятности элементарных событий. События в случайных экспериментах и благоприятствующие элементарные события. Вероятности случайных событий. Опыты с равновозможными элементарными событиями. Классические вероятностные опыты с использованием монет, кубиков. Представление событий с помощью диаграмм Эйлера. Противоположные события, объединение и пересечение событий. Правило сложения вероятностей. Случайный выбор. Независимые события. Последовательные независимые испытания. Представление эксперимента в виде дерева, умножение вероятностей.

Испытания до первого успеха. Условная вероятность. Формула полной вероятности.

Элементы комбинаторики и испытания Бернулли. Правило умножения, перестановки, факториал. Сочетания и число сочетаний. Треугольник Паскаля и бином Ньютона. Опыты с большим числом равновозможных элементарных событий. Вычисление вероятностей в опытах с применением элементов комбинаторики. Испытания Бернулли. Успех и неудача. Вероятности событий в серии испытаний Бернулли.

Геометрическая вероятность. Случайный выбор точки из фигуры на плоскости, отрезка и дуги окружности. Случайный выбор числа из числового отрезка.

Случайные величины. Дискретная случайная величина и распределение вероятностей. Равномерное дискретное распределение. Геометрическое распределение вероятностей. Распределение Бернулли. Биномиальное распределение. Независимые случайные величины. Сложение, умножение случайных величин. Математическое ожидание и его свойства. Дисперсия и стандартное отклонение случайной величины; свойства дисперсии. Дисперсия числа успехов в серии испытаний Бернулли. Понятие о законе больших чисел. Измерение вероятностей и точность измерения. Применение закона больших чисел в социологии, страховании, в здравоохранении, обеспечении безопасности населения в чрезвычайных ситуациях.

Примерное планирование курса «Теория вероятностей и статистика»

по УМК Ю. Н. Тюрина, А. А. Макарова, И. Р. Высоцкого и И. В. Ященко

Примерное планирование соответствует ФГОС основного общего образования, примерной программе основного общего образования (одобрена ФУМО; протокол № 1/15 от 08.04.2015).

В 7—9 классах на изучение курса «Теория вероятностей и статистика» предлагается выделить от 0,5 до 1 урока в неделю на базовом уровне и не менее 1 урока на углублённом уровне.

Ниже приводятся варианты планирования курса «Теория вероятностей и статистика», рассчитанные на 17 уроков в год (0,5 ур./нед.) для базового уровня и 34 урока в год (1 ур./нед.) для базового и углублённого уровня.

При использовании компьютеров для проведения лабораторных и практических работ учитель самостоятельно определяет время, отведённое на изучение материала соответствующих тем, и изменения в перечне элементов содержания курса, руководствуясь примерными программами и ФГОС.

Рекомендуемые сроки. Каждая образовательная организация самостоятельно определяет сроки прохождения тем курса. Практика и результаты опроса учителей показывают, что удачным решением является распределение тем, при котором весь годовой вероятностно-статистический материал изучается одним блоком в феврале—апреле.

Базовый уровень
(7—9 классы, 17 уроков в год, всего 51 урок)

7 класс

Темы курса	Кол-во уроков	Раздел и параграф
Представление данных в таблицах и диаграммах	**4**	
Представление данных в таблицах	1	
Графическое представление данных в виде круговых и столбиковых диаграмм	1	
Практическая работа с таблицами и диаграммами	2	
Описательная статистика	**7**	
Среднее арифметическое	1	
Медиана[1]	2	
Наибольшее и наименьшее значение	1	
Отклонение и размах. *Дисперсия*	2	
Практическая работа по описательной статистике	1	
Случайная изменчивость	**2**	
Случайная изменчивость. Изменчивость при измерениях	2	
Контрольная работа	**1**	
Повторение	**3**	
Всего	**17**	

[1] Курсивом выделены элементы содержания, не обязательные для изучения на базовом уровне в соответствии с примерной программой основного общего образования либо не вошедшие в примерную программу базового уровня.

8 класс

Темы курса	Кол-во уроков	Раздел и параграф
События и вероятности	**5**	
Случайные события. Вероятности и частоты	1	
Случайные опыты и элементарные события	1	**I.1—3**
Благоприятствующие элементарные события. Вероятности событий	1	
Опыты с равновозможными элементарными событиями	2	
Сложение и умножение вероятностей	**6**	
Противоположное событие и диаграммы Эйлера	1	**I.4**
Несовместные события. Правило сложения	2	
Представление эксперимента в виде дерева. Правило умножения вероятностей. Независимые события. Случайный выбор	3	**I.4, 1.5**
Элементы комбинаторики	**3**	
Комбинаторное правило умножения. Число сочетаний. Треугольник Паскаля	1	
Решение задач на вычисление вероятностей	2	
Контрольная работа	**1**	
Повторение	**2**	
Всего	**17**	

9 класс

Темы курса	Кол-во уроков	Раздел и параграф
Геометрическая вероятность	**2**	
Выбор точки и фигуры на плоскости	1	
Выбор точки из дуги и отрезка	1	
Последовательности испытаний	**4**	
Успех и неудача. Испытания до первого успеха	1	**II.6**
Испытания Бернулли. Вероятности событий в серии испытаний Бернулли	3	**II.7**
Случайные величины и их характеристики	**3**	
Случайные величины и распределения вероятностей. Примеры	1	**III.9**
Математическое ожидание случайной величины. Свойства математического ожидания	2	**III.10**
Случайные величины в статистике	**3**	
Понятие о законе больших чисел и измерение вероятностей	2	
Применение закона больших чисел в социологии, страховании, медицине, обеспечении безопасности населения в чрезвычайных ситуациях	1	
Повторение	**5**	
Всего	**17**	

Базовый уровень
(7—9 классы, 34 урока в год, всего 102 урока)

7 класс

Темы курса	Кол-во уроков	Раздел и параграф
Представление данных в таблицах и диаграммах	**7**	
Представление данных в таблицах	1	
Практическая работа с таблицами	1	
Графическое представление данных в виде диаграмм	2	
Практическая работа с диаграммами	1	
Диаграммы рассеивания	2	
Описательная статистика	**13**	
Среднее арифметическое	2	
Медиана	3	
Наибольшее и наименьшее значение	2	
Отклонение, размах и *дисперсия*	3	
Решающие правила	2	
Практическая работа «Описательная статистика»	1	
Случайная изменчивость	**4**	
Случайная изменчивость	4	
Контрольная работа	**1**	
Введение в теорию вероятностей	**3**	
Резерв и повторение	**6**	
Всего	**34**	

8 класс

Темы курса	Кол-во уроков	Раздел и параграф
События и вероятности	**7**	
Случайные события. Вероятности и частоты	1	
Случайные опыты и элементарные события	1	**I.1—3**
Благоприятствующие элементарные события. Вероятности	1	
Опыты с равновозможными элементарными событиями	4	
Сложение и умножение вероятностей	**13**	
Противоположное событие и диаграммы Эйлера	1	**I.4**
Объединение и пересечение событий	2	
Несовместные события. Правило сложения	2	
Независимые события	3	
Случайный выбор. Представление эксперимента в виде дерева. Правило умножения вероятностей	5	**I.5**
Контрольная работа	**1**	
Элементы комбинаторики	**8**	
Правило умножения. Перестановки. Факториал	1	
Правило умножения в задачах на вычисление вероятностей	2	
Сочетания и число сочетаний. Треугольник Паскаля	2	
Решение задач на вычисление вероятностей	3	
Резерв и повторение	**5**	
Всего	**34**	

9 класс

Темы курса	Кол-во уроков	Раздел и параграф
Геометрическая вероятность	**4**	
Выбор точки и фигуры на плоскости	2	
Выбор точки из дуги и отрезка	2	
Последовательности испытаний	**13**	
Успех и неудача. Испытания до первого успеха	3	**II.6**
Испытания Бернулли. Вероятности событий в серии испытаний Бернулли	5	**II.7**
Случайный выбор из конечной совокупности	4	**II.8**
Контрольная работа	1	
Случайные величины	**9**	
Примеры случайных величин. Распределение вероятностей	2	**III.9**
Математическое ожидание случайной величины. Свойства математического ожидания	3	**III.10**
Дисперсия случайной величины. Свойства дисперсии. Стандартное отклонение	3	**III.11**
Контрольная работа	1	
Случайные величины в статистике	**4**	
Понятие о законе больших чисел и измерение вероятностей	2	
Применение закона больших чисел в социологии, страховании, медицине, обеспечении безопасности населения в чрезвычайных ситуациях	2	
Резерв и повторение	**4**	
Всего	**34**	

Углублённый уровень
(7—9 классы, 34 урока в год, всего 102 урока)

7 класс

Темы курса	Кол-во уроков	Раздел и параграф
Представление данных в таблицах и диаграммах	**5**	
Представление данных в таблицах и диаграммах	1	
Практическая работа с диаграммами	2	
Диаграммы рассеивания	2	
Описательная статистика	**13**	
Средние значения. Среднее арифметическое	1	
Медиана	2	
Наибольшее и наименьшее значение	1	
Отклонение, размах и дисперсия	2	
Выбросы в числовых данных	2	
Свойства средних и дисперсии	2	
Решающие правила	2	
Практическая работа «Описательная статистика»	1	
Случайная изменчивость	**3**	
Случайная изменчивость	1	
Закономерности в изменчивых явлениях	2	
Контрольная работа	1	
События и вероятности	**9**	
Случайные события. Вероятности и частоты	1	
Случайные опыты и элементарные события	1	**I.1—3**
Благоприятствующие элементарные события. Вероятности	3	
Опыты с равновозможными элементарными событиями	4	
Резерв и повторение	**3**	
Всего	**34**	

8 класс

Темы курса	Кол-во уроков	Раздел и параграф
Сложение и умножение вероятностей	**17**	
Диаграммы Эйлера. Противоположные события	2	**I.4**
Объединение и пересечение событий. Несовместные события	2	
Формула сложения вероятностей	2	
Случайный выбор	1	
Независимые события. Умножение вероятностей	4	
Представление эксперимента в виде дерева. Условная вероятность	5	**I.5**
Контрольная работа	1	
Элементы комбинаторики	**8**	
Правило умножения. Перестановки. Факториал	2	
Правило умножения в задачах на вычисление вероятностей	2	
Сочетания и число сочетаний. Треугольник Паскаля	2	
Сочетания в задачах на вычисление вероятностей	2	
Геометрическая вероятность	**4**	
Выбор точки и фигуры на плоскости	2	
Выбор точки из дуги и отрезка	2	
Резерв и повторение	**5**	
Всего	**34**	

9 класс

Темы курса	Кол-во уроков	Раздел и параграф
Последовательности испытаний	**12**	
Испытания до первого успеха	3	**II.6**
Испытания Бернулли. Серии испытаний Бернулли	1	**II.7**
Вероятности событий в серии испытаний Бернулли	4	
Случайный выбор из конечной совокупности	3	**II.8**
Контрольная работа	1	
Случайные величины	**13**	
Примеры случайных величин. Распределения вероятностей	2	**III.9**
Распределение Бернулли (бинарной случайной величины). Биномиальное распределение	2	
Математическое ожидание случайной величины. Свойства математического ожидания	3	**III.10**
Дисперсия случайной величины и свойства дисперсии. Стандартное отклонение	3	**III.11**
Математическое ожидание и дисперсия биномиального распределения	2	**III.10—11**
Контрольная работа	1	
Закон больших чисел и измерение вероятностей	**5**	
Понятие о законе больших чисел и измерение вероятностей	1	
Точность измерения вероятностей	2	
Применение закона больших чисел в социологии, страховании, *медицине, обеспечении безопасности населения в чрезвычайных ситуациях*	2	
Резерв и повторение	**4**	
Всего	**34**	

Ответы

1. а) четыре: ОО, ОР, РО и РР; б) ОО, ОР и РО. **2.** $A = \{ОО, ОР\}$.
3. а) $A = \{ОО, РР\}$; б) $B = \{ОР, РО, РР\}$.
4. Восемь. ООО, ООР, ОРО, ОРР, РОО, РОР, РРО и РРР.
5. а) $A = \{ООО, ООР, РОО, РОР\}$; б) $B = \{ООО, ООР, ОРО, РОО, РОР\}$.
6. а) Например, «во второй раз выпала решка»;
б) например, «выпала хотя бы одна решка».
7. а) Например, «решка выпала ровно один раз»;
б) например, «в первый и третий раз выпал орёл».
8. 0,5. **9.** а) 0,5; б) 0,75. **10.** 0,5. **11.** а) 0,875; б) 0,75.
12. а) 0,25; б) 0,375.
13. а) Число выпавших очков; их шесть; б) $A = \{1, 3, 5\}$.
14. а) $M = \{1, 2, 3\}$; $N = \{3, 6\}$.
15. а) Например, «выпало чётное число»;
б) например, «выпало больше чем 1 очко».
16. а) 0,5; б) $\frac{1}{3}$. **17.** а) Пара чисел, например, (3; 4); б) 36.

18.

	1	2	3	4	5	6
1						X
2						
3		X				
4						
5						
6	X					

19. а)

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4		X				
5						
6						

; $\frac{1}{36}$; б)

	1	2	3	4	5	6
1					X	
2						
3						
4		X				
5	X					
6						

; $\frac{1}{12}$.

20. а)

	1	2	3	4	5	6
1				X		
2						
3						
4						
5		X				
6	X		X			

; $\frac{1}{9}$; б)

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3					X	
4				X		
5						
6						

; $\frac{1}{18}$.

21. а) $A = \{(1; 4), (2; 3), (3; 2), (4; 1)\}$; б)

	1	2	3	4	5	6
1				×		
2			×			
3		×				
4	×					
5						
6						

.

22. а)

	1	2	3	4	5	6
1						
2						×
3					×	
4				×		
5			×			
6		×				

; б)

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3	×					
4		×				
5			×			
6				×		

.

23. а) Например, «сумма выпавших очков равна 9»;
б) например, «выпавшие очки отличаются на 3».

24. $\frac{5}{36}$. **25.** а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{5}{36}$. **26.** а) $\frac{13}{18}$; б) $\frac{1}{9}$. **27.** а) $\frac{4}{9}$; б) $\frac{1}{6}$. **28.** 0,8.
29. а) 0,3; б) 0,4. **30.** а) 0,5; б) 0,5. **31.** а) 0,5; б) 0,75. **32.** а) $\frac{5}{6}$; б) 0,5.
33. а) $\frac{1}{12}$; б) 0,5.

34.

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4					×	
5				×		
6			×			

; 0,75.

35.

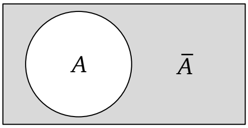
	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5				×		
6				×		

; 0,2.

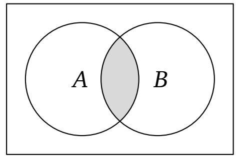
36. 0,625. **37.** а) 0,25; б) $\frac{1}{3}$; в) 0,75. **38.** 0,4. **39.** 0,4. **40.** $\frac{1}{3}$. **41.** 0,6.
42. $\frac{5}{9}$. **43.** 0,25. **44.** 0,35. **45.** 0,3125. **46.** 0,35. **47.** 0,2. **48.** $\frac{1}{3}$.
49. $\frac{1}{6}$. **50.** 0,1. **51.** 0,0007. **52.** 0,25. **53.** $\frac{4}{15}$. **54.** 0,2. **55.** 0,25.
56. 0,375. **57.** 0,48. **58.** 0,48. **59.** 0,32. **60.** 0,6. **61.** 0,75. **62.** $\frac{11}{13}$.
63. а) 0,25; б) 0,4; в) 0,9. **64.** 0,8. **65.** 0,625. **66.** $\frac{1}{3}$. **67.** 0,25. **68.** 0,006.
69. $\frac{8}{15}$. **70.** 0,25. **71.** *C*. **72.** *BCA*. **73.** *C*. **74.** а) *B*; б) нет. **75.** 0,13.
76. 0,47. **77.** 0,966. **78.** 0,24. **79.** 0,08. **80.** 0,09. **81.** 0,24. **82.** 0,41.
83. 0,8. **84.** 0,31. **85.** *CBAD*. **86.** а) *C*; б) сравнить нельзя; в) $\mathrm{P}(D) \geqslant \mathrm{P}(B)$.

87. 0,64. **88.** 0,87. **89.** а) 0,66; б) 0,16. **90.** 0,56. **91.** 0,99. **92.** $\frac{29}{30}$.

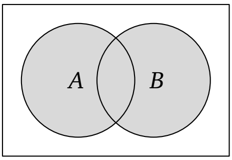
93. 0,96. **94.**



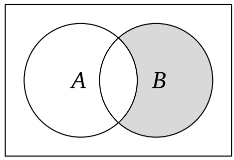
95.



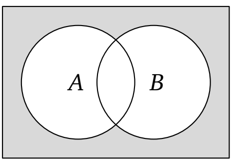
96.



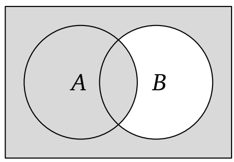
97.



98.

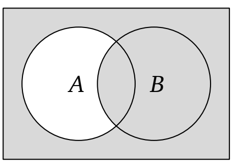


99.



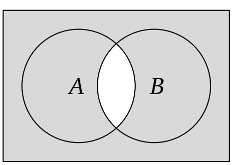
100. а) Наступило событие B или не наступило событие A;

б)

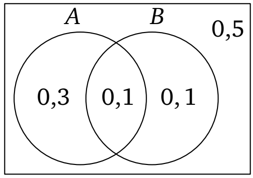


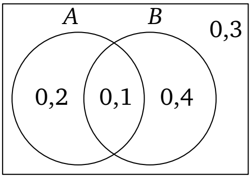
101. а) Не наступило хотя бы одно из событий A или B;

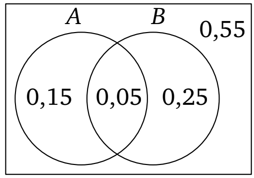
б)

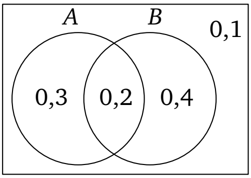


102. 0,4. **103.** 0,4. **104.**



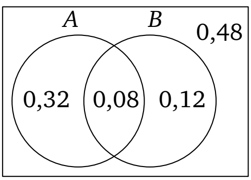
105. 

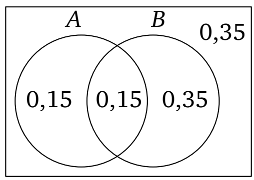
106. 

107. 

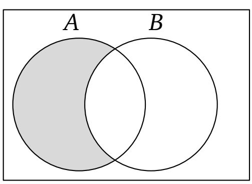
108. 0,58. **109.** а) 0,1; б) 0,2; в) 0,5.

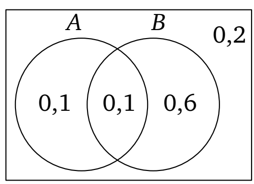
110. 0,24. **111.** а) 0,24; б) $\frac{1}{4}$; в) $\frac{mk}{n^2}$. **112.** $\frac{2}{9}$. **113.** $\frac{1}{12}$.

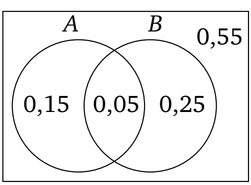
116. 

117. 

118. а) Нет; б) 0,625. **119.** а) Да; б) 0,625. **120.** 0,0768.
121. 0,9936. **122.** а) 0,91; б) 0,42; в) 0,49. **123.** а) 0,72; б) 0,02.
124. а) 0,9025; б) 0,9975. **125.** 0,15. **126.** а) 0,24; б) 0,52; в) 0,24.

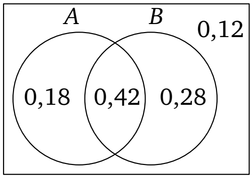
127. 0,98. **128.** 

129. 

130. а) 

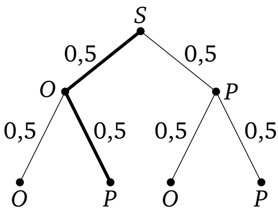
; б) 0,15. **131.** а) 0,2; б) $\frac{1}{6}$. **132.** $\frac{1}{3}$.

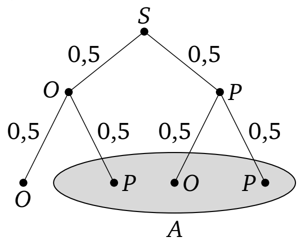
133. а) 0,13; б) 0,26; в) 0,67.
134. а) {РРО, ОРР, РРР}, {РРО, ОРР, РОР}, {РРО, ОРР};
б) 0,375, 0,375 и 0,25; в) нет; г) 0,5.

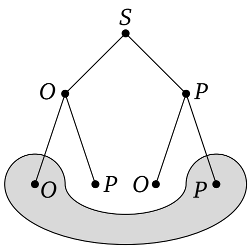
135. а) 

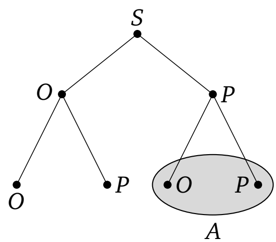
; б) 0,58. **136.** 0,18.

137. а) 0,8836; б) 0,9964. **138.** а) 0,35; б) 0,5; в) 0,85.

139. 

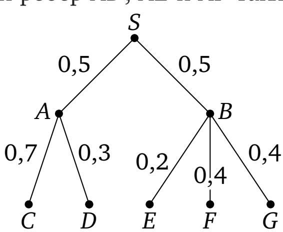
140. 

141. а) 

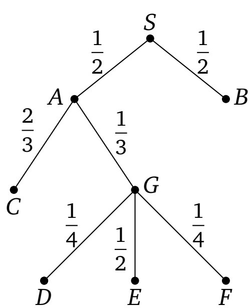
; б) 

.

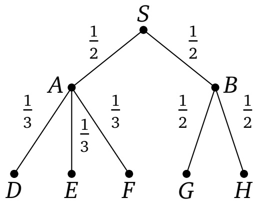
142. Сумма вероятностей рёбер SA, SB и SC не равна единице; сумма вероятностей рёбер AD, AE и AF также не равна единице.

143. а) 

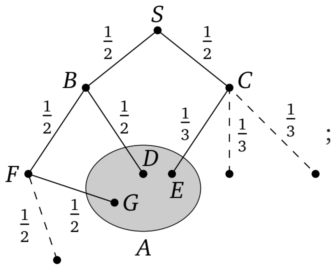
; б) пять; в) 0,35 и 0,1; г) 0,2.

144. а) 

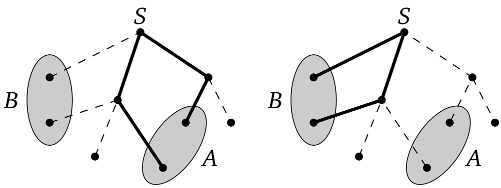
; б) $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{24}$.

145. а) 

; б) пять; в) $\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{4}$.

146. а), б) 

; в) $\frac{13}{24}$.

147. а) 

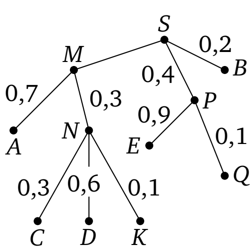
б) $\frac{5}{18}$; в) $\frac{4}{9}$.

148. 0,45. **149.** $\frac{1}{6}$. **150.** а) $\frac{1}{12}$; б) $\frac{5}{24}$; в) $\frac{1}{3}$. **151.** а) $\frac{1}{18}$; б) $\frac{5}{18}$; в) $\frac{7}{18}$. **152.** 0,92. **153.** 0,0595. **154.** 0,34. **155.** 0,078. **156.** 0,4. **157.** 0,32. **158.** 0,336. **159.** $\frac{76}{153}$. **160.** $\frac{10}{19}$. **161.** $\frac{14}{29}$. **162.** 0,52. **163.** $\frac{18}{203}$.

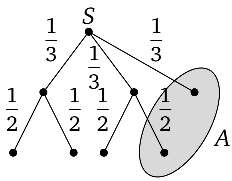
164. а) $\frac{50}{203}$; б) $\frac{135}{203}$. **165.** $\frac{8}{15}$.

166. $\frac{3}{136}$. *Указание*. В дереве организуйте три цепочки, соответствующие событию «Андрей сидит между Димой и Светой» и двумя аналогичными событиями: «Дима сидит между Андреем и Светой» и «Света сидит между Андреем и Димой». Впрочем, дерево можно устроить разными способами.

167. 0,2. **168.** 0,25. **169.** 0,8. **170.** 0,2. **171.** $\frac{1}{65}$.

172. а) 

; б) 7; в) 0,012; г) 0,36.

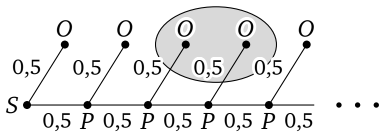
173. а) 

; б) 0,5. **174.** а) $\frac{5}{36}$; б) 0,5. **175.** 0,973.

176. а) $\frac{19}{39}$; б) $\frac{59}{176}$. **177.** 0,9612. **178.** а) $\frac{19}{495}$; б) $\frac{316}{495}$. **179.** 0,3.
180. а) Последовательности вида О, РО, РРО, РРРО и т. д. (какое-то количество букв Р и одна буква О в конце);

б) бесконечно много, несмотря на то что каждый эксперимент не занял много времени, — теоретически можно вообразить, что какая-то «упрямая» монета будет выпадать решкой сколько угодно раз, прежде чем всё же даст орла.

181. 0,0625. **182.** $\frac{625}{7776}$, т. е. приближённо 0,08.

183. а) 

;

б) $0{,}125+0{,}0625=0{,}1875$.

184. а) $\frac{25}{216}$; б) $\frac{91}{216}$. **185.** а) q^2p; б) q^3; в) $1-q^5$.
186. а) qp; б) q^4; в) $1-q^6$; г) q^2-q^5. **187.** а) 0,21; б) 0,91.
188. а) 0,1024; б) 0,488. **190.** а) 0,081; б) 0,139. **191.** 0,16.
192. а) $\mathrm{P}(A)>\mathrm{P}(B)$; б) $\mathrm{P}(C)<\mathrm{P}(D)$. **193.** а) 0,09; б) 0,01.
194. а) 0,009; б) Увеличение вероятности поражения цели очень мало: в пределах ошибки измерения вероятности. С другой стороны, повторный контроль и третий выстрел занимают ценное время. Так что минусы перевешивают плюсы. Лучше потратить сэкономленное время и заряды на следующую цель.
195. а) q^4p, приближённо 0,015;

б) $q-q^4$, приближённо 0,374, где $q=1-p$.

196. а) q^7, т. е. 0,0016384; б) $1-q^6$, т. е. 0,995904, где $q=1-p$;

в) событие «более 7 попыток» практически невозможное, а событие «не более шести» практически достоверное[1].

197. 38. **198.** 14.
200. а) 0,125; б) 0,3125. **201.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{8}{81}$. **202.** а) qp; б) q^9.

---

[1] Важно, решая эту и следующие задачи, заострить внимание на характере полученных результатов. В этой задаче при не очень высокой меткости стрелка (60 % попаданий) за счёт независимости попыток запаса в шесть патронов уже достаточно, чтобы практически наверняка поразить цель.

203. 0,027. **204.** 0,086. **205.** а) 0,1024; б) 0,5904. **206.** а) 0,6561.
207. а) последовательности О, РО, РРО и т. д. (см. задачу 180);
б) последовательность из десяти букв, например РООРООООРР.
208. г) События «2 орла» и «8 орлов» равновероятны по соображениям симметрии. На остальные вопросы ответы пока только предположительные.
209. Нет. **210.** а) от 0 до 3; б) от 0 до 6; в) от 0 до n.

211. 3 монеты

Число выпавших орлов (k)	0	1	2	3
Вероятность	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

212.

Число выпавших орлов (k)	0	1	2
Вероятность	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

213. 4 монеты

Число выпавших орлов (k)	0	1	2	3	4
Вероятность	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

214. а) Например, ОРОРР и РРООР, есть и другие исходы;
б) $\frac{1}{32}$ у обоих исходов; в) они равны.
215. а) Например, РООООР и РРОООО, есть и другие исходы;
б) $\frac{1}{64}$ у обоих исходов; в) они равны.
216. а) Например, ООООРРРРРРРР и РРРРРРРООООО; б) $\frac{1}{2^{12}}$; в) $\frac{1}{2^{12}}$.
217. а) Например, ОООРРРР, вероятность $\frac{1}{128}$; б) $\frac{35}{128}$.
218. а) $\frac{15}{64}$; б) $\frac{5}{16}$; в) $\frac{15}{64}$.
219. Количество элементарных исходов с тремя орлами.
220. $\frac{7}{32}$. **221.** а) $\frac{35}{128}$; б) $\frac{21}{128}$; в) $\frac{35}{128}$; г) $\frac{21}{128}$.
222. а) $\frac{63}{256}$; б) $\frac{21}{128}$; в) $\frac{21}{128}$; г) $\frac{9}{128}$. **223.** а) $\frac{1}{16}$; б) $\frac{3}{8}$. **224.** а) $\frac{35}{128}$; б) $\frac{7}{16}$.
225. а) УННН, НУНН, ННУН и НННУ; б) $\frac{25}{1296}$; в) нет.
226. а) $\frac{5}{1296}$; б) $\frac{125}{1296}$. **227.** а) $\frac{625}{3888}$; б) $\frac{25}{7776}$; в) $\frac{763}{3888}$.
228. а) $1-p$; б) $15p^2q^4$; в) 0,246.
229. а) $56p^3q^5$; б) $70p^4q^4$; в) 0,147 и 0,046.
230. а) 0,167; б) 0,015; в) 0,984. **231.** а) 0,155; б) 0,833; в) 0,167.
232. 0,42. **233.** а) 0,336; б) 0,503. **234.** 4 успеха. **235.** а) 5; б) 4.
236. а) 0,973. **237.** 4. **238.** 37. **239.** а) Нет; б) да. **240.** 5.
241. 7 или больше. **242.** 6 или больше.

243. а) Например, ОООРР и РОООР; б) $\frac{1}{32}$. **244.** а) $\frac{1}{1024}$; б) $\frac{1}{1024}$.
245. а) $\frac{35}{128}$; б) $\frac{7}{32}$; в) $\frac{7}{64}$; г) $\frac{1}{32}$. **246.** а) $\frac{125}{324}$; б) $\frac{25}{216}$; в) $\frac{325}{648}$.
247. а) $126p^4q^5$; б) $126p^5q^4$; в) 0,007 и 0,001.
248. а) $35p^3q^4$; б) $21p^5q^2+7p^6q$; в) 0,227 и 0,029.
249. а) 0,234; б) 0,328. **250.** а) 0,228; б) 0,032; в) 0,965.
251. а) 0,346; б) 0,337. **252.** 4. **253.** а) Нет; б) да; в) 0,984. **254.** $\frac{5}{14}$.
255. а) 0,525; б) $\frac{7}{24}$. **256.** а) $\frac{10}{21}$; б) $\frac{5}{14}$; в) $\frac{10}{21}$; г) 0.
257. а) $\frac{1}{14}$; б) $\frac{3}{7}$; в) $\frac{3}{7}$; г) $\frac{1}{14}$. **258.** а) $\frac{1}{21}$; б) $\frac{5}{14}$; в) $\frac{10}{21}$; г) $\frac{5}{42}$.
259. а) $\frac{3}{7}$; б) $\frac{1}{210}$. **260.** а) $\frac{50}{63}$; б) $\frac{20}{21}$; в) нет. **261.** а) $\frac{2}{7}$; б) $\frac{55}{56}$; в) 2.
262. а) 3; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{1}{3}$. **263.** 0,359. **264.** а) 0,370; б) 0,222. **265.** A_4.
266. 2. **267.** $\frac{6}{35}$. **268.** а) $\frac{4}{21}$; б) $\frac{2}{7}$.
269. а) 0,0000027; б) 0,012;

в) 0,013. События «ровно 3» и «хотя бы 3» практически одинаково вероятны, маловероятны, но вряд ли следует считать их невозможными: в среднем примерно 13 человек из 1000 получают какой-то выигрыш. Событие «5 из 5» практически невероятно: в среднем случается 27 раз на 10 миллионов проданных билетов.

270. а) 0,000000072; б) 0,01765; в) 0,01864.
271. а) $\frac{15}{28}$; б) $\frac{15}{56}$. **272.** а) $\frac{5}{14}$; б) $\frac{1}{12}$; в) 3. **273.** а) $\frac{15}{28}$; б) $\frac{15}{28}$; в) $\frac{2}{7}$.
274. а) $\frac{3}{7}$; б) $\frac{13}{14}$; в) $\frac{1}{14}$. **275.** а) 0,349; б) 0,268.
276. а) 5; б) равновероятны; в) 6. **277.** а) $\frac{10}{21}$; б) $\frac{1}{7}$.
278. а) да; б) нет; в) да; г) да. **279.** а) 4; б) 0,2. **280.** а) 5; б) 0,15.
281. а) и б) $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ (значения в первой строке).
282. Все целые неотрицательные числа.
283. а) Множество натуральных чисел 1, 2, 3, …;

б) 0, 1, 2, 3, …; в) $F = Y - 1$.

284. а) и б) 0, 1, 2, 3, 4 и 5; в) $Q = 5 - S$.
285. а) Натуральные числа от 1 до 9;

б) натуральные числа от 9 до 17; в) $Y = X + 8$.

286. а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{6}$; в) $\frac{1}{36}$.
287. а) Целые значения от 2 до 12; б) $S = X + Y$; в) $\frac{1}{12}$.
288. а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{5}{18}$.

289. а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$.

290. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$. **291.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$. **292.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

293. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$. **294.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{17}{18} & \frac{1}{18} \end{pmatrix}$.

295. а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{23}{24} & \frac{1}{24} \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{11}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}75 & 0{,}25 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

296. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}75 & 0{,}25 \end{pmatrix}$.

297. а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}875 & 0{,}125 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{255}{256} & \frac{1}{256} \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-\frac{1}{2^k} & \frac{1}{2^k} \end{pmatrix}$.

298. а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-q^2 & q^2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-q^4 & q^4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-q^k & q^k \end{pmatrix}$.

299. $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 & 17 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$.

300. а) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 & 11 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 & 7 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} -13 & -3 & 2 & 22 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} -18 & -2 & 2 & 10 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix}$.

301. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ \frac{2}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$. **302.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{15} & \frac{7}{15} & \frac{7}{15} \end{pmatrix}$.

303. $\begin{pmatrix} -1\,995\,000 & -115\,000 & 5\,000 \\ 0{,}0001 & 0{,}01 & 0{,}9899 \end{pmatrix}$.

304. $\begin{pmatrix} -600\,000 & -20\,000 & 30\,000 \\ 0{,}03 & 0{,}11 & 0{,}86 \end{pmatrix}$. **305.** $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 49 \\ \frac{1}{6} & \frac{7}{12} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

306. а) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ \frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & 16 \\ \frac{5}{12} & \frac{7}{12} \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 16 & 25 \\ 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}1 \end{pmatrix}$.

308. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$.

309. а) $\begin{pmatrix} 0 & 50 & 5\,000 & 2\,000\,000 \\ 0{,}987252 & 0{,}012334 & 0{,}000411 & 0{,}000003 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} -1\,999\,950 & -4\,950 & 0 & 50 \\ 0{,}000003 & 0{,}000411 & 0{,}012334 & 0{,}987252 \end{pmatrix}$.

310. $\begin{pmatrix} -199\,999\,950 & -499\,950 & 0 & 50 \\ 0{,}00000007 & 0{,}00001845 & 0{,}00096862 & 0{,}99901286 \end{pmatrix}$.

311. а) 6; б) 0,2.

312. а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$.

313. а) $1, 2, 3, \ldots$; б) $0, 1, 2, 3, \ldots$; в) $X = Y + 1$.

314. а) и б) Целые от 0 до 7; в) $Q = 7 - S$.

315. Целые от 0 до 20, кроме числа 19.

316. а) Целые числа от 10 до 99; б) целые числа от -2 до 87; в) $X = Y + 12$.

317. а) $\frac{5}{36}$; б) $\frac{5}{18}$. **318.** а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{7}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix}$.

319. а) $\begin{pmatrix} -8 & -4 & -1 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 & 11 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -13 & -9 & 3 & 19 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$.

320. $\begin{pmatrix} -885\,000 & -335\,000 & -35\,000 & 15\,000 \\ 0{,}001 & 0{,}01 & 0{,}09 & 0{,}899 \end{pmatrix}$.

321. а) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$. **322.** а) 3,8; б) 2,5.

323. а) 2,7; б) 2,5; в) 0. **324.** а) 2; б) 0. **325.** а) -1; б) $-1{,}5$.

326. а) 8; б) -16; в) 0; г) 17. **327.** а) 6; б) -15; в) 4; г) 13.

328. а) $\frac{5}{3}$; б) 1; в) 3,25; г) -6. **329.** а) -1; б) 5; в) -13; г) -2. **330.** $\frac{53}{3}$.

331. а) $\frac{16}{7}$; б) 11; в) 12,4. **332.** Не существует. **333.** Существует и равно 2.

334. а)$-0{,}1$; б) $-1{,}7$; в) 0,7; г) 0,2.

335. а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$; б) 0,5; в) $S = I_1 + I_2$; г) 1. **336.** 1,5.

337. а) 2; б) 3,5; в) $\frac{n}{2}$. **338.** $10p$. **339.** 0,3. **340.** 2,8. **341.** 5,6. **342.** 40.

343. 3,5. **344.** 7. **345.** а) 10,5; б) 14; в) 35; г) $3{,}5n$. **346.** 2. **347.** 5.

348. $\frac{1}{p}$. **349.** 3600 рублей. **350.** 5600 рублей. **351.** 42 рубля 2 копейки.

352. 26 рублей 42 копейки. **353.** а) 5,75; б) 1,94. **354.** а) 6; б) -2.

355. а) 6; б) -8; в) 4; г) $\frac{2}{3}$. **356.** а) 7; б) 5,4. **357.** а) 7; б) -5; в) -1.

358. 4. **359.** 17,5. **360.** $\frac{91}{6}$. **361.** 2,7. **362.** 12,5.

363. а) $\begin{pmatrix} 1 & 16 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$; б) 4 и 2. **364.** а) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 16 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \end{pmatrix}$; б) 7 и $\sqrt{7}$.

365. 1,2. **366.** 5,8. **367.** 5,8. **368.** а) 9,6; б) 3,5; в) 27,2.

369. а) 10,4; б) 3; в) 7,36. **370.** $\dfrac{35}{12}$ и 1,708.
371. а) 2; б) 8; в) 18; г) 2. **372.** а) 9,6; б) 9,6; в) 2,4; г) 0,6.
373. а) 6; б) 6; в) 29; г) 49. **374.** а) 13; б) 13; в) 3,25; г) 2.
375. $\dfrac{35}{6}$ и 2,415.
376. а) 8,75 и 2,958; б) 29,167 и 5,401; в) 350 и 18,708; г) $\dfrac{35n}{12}$ и $\dfrac{\sqrt{35n}}{2\sqrt{3}}$.
377. а) 0,21; б) pq.
378. а) 0,25; б) $S=I_1+I_2$, $\mathrm{D}S=0{,}5$; в) $F=\dfrac{I_1+I_2}{2}$, $\mathrm{E}F=0{,}5$, $\mathrm{D}F=0{,}125$.
379. а) $S=I_1+I_2+I_3$, $\mathrm{D}S=\dfrac{3}{4}$; б) $F=\dfrac{I_1+I_2+I_3}{3}$, $\mathrm{E}F=\dfrac{1}{2}$, $\mathrm{D}F=\dfrac{1}{12}$.
380. а) $S=I_1+I_2+I_3+\ldots+I_n$, $\mathrm{D}S=\dfrac{n}{4}$;
б) $F=\dfrac{I_1+I_2+I_3+\ldots+I_n}{n}$, $\mathrm{E}F=\dfrac{1}{2}$, $\mathrm{D}F=\dfrac{1}{4n}$.
381. $S=I_1+I_2+I_3+\ldots+I_n$, $\mathrm{E}S=np$, $\mathrm{D}S=npq$.
382. $\mathrm{E}F=p$, $\mathrm{D}F=\dfrac{pq}{n}$.
383. а) $\mathrm{E}I=p$, $\mathrm{D}I=pq$; б) при бросании монеты;
в) при $p=\dfrac{1}{2}$, например при бросании монеты.
384. а) У второго; б) равны; в) нет.
385. Для первого вопроса на 100 выше. **386.** Для первого.
387. Для второго вопроса. По результатам опроса можно предполагать, что вероятность ответа «да» на первый вопрос намного ближе к 0,5, чем вероятность ответа «да» на второй. Поэтому дисперсия частоты ответа «да» для второго вопроса меньше, чем для первого, а значит, скорее всего, частота ответа «да» на второй вопрос ближе к вероятности такого ответа.
388. а) $\begin{pmatrix} 4 & 9 & 121 \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$; 21,75; б) $\begin{pmatrix} 1 & 16 & 36 \\ 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix}$; 6.
389. а) 2,24 и 1,497; б) 4,2 и 2,049. **390.** а) 3,21; б) 3,5; в) 27,2.
391. 45. **392.** а) Нет; б) да; в) да. **393.** а) 18; б) 72; в) 2.
394. а) 1,8; б) 7,2; в) 0,2. **395.** а) и б) 25; в) 180; г) 2. **396.** $\dfrac{35}{3}$.

Индивидуальные карточки

И1.1. 1. а) A; б) события равновероятны. **2.** а) 0,25; б) $\dfrac{7}{12}$; в) $\dfrac{13}{18}$.
И1.2. 1. а) 0,75; б) 0,5. **2.** 7. **И1.3. 1.** $\dfrac{3}{7}$. **2.** а) B; б) события равновероятны.
И2.1. 1. 0,3125. **2.** а) $\dfrac{3}{7}$; б) $\dfrac{3}{14}$. **И2.2. 1.** 0,45. **2.** $\dfrac{1}{32}$.
И2.3. 1. 0,375. **2.** 0,001. **И3.1. 1.** D. **2.** 0,23.
И3.2. 1. 0,76. **2.** а) 0,8; б) 0,05; в) Достаточно привести пример случайной величины, которая принимает с ненулевой вероятностью какое-нибудь зна-

чение между 3 и 4. Например, распределение может быть таким:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3{,}5 & 4 \\ 0{,}8 & 0{,}05 & 0{,}07 & 0{,}05 & 0{,}03 \end{pmatrix}.$$

Все условия выполнены, но $\mathrm{P}(X=3)=0{,}07$.

И3.3. 1. 0,2. **2.** 0,97.

И4.1. 1. а) Нет, поскольку события, связанные с отсутствием нужного лекарства, оказались зависимы; б) 0,82; в) 0,22. **2.** Например, $(A\cap B)\cup(\bar{A}\cap\bar{B})$.

И4.2. 1. а) Да; б) $\frac{5}{9}$. **2.** Например, $(A\cup B)\cap(\overline{A\cap B})$.

И4.3. 1. а) Нет; б) $\frac{4}{9}$. **2.** Вероятности равны, поскольку указанные события совпадают.

И5.1. 1. а) 0,3; б) $\frac{2}{3}$. **2.** $\frac{1}{3}$. **И5.2. 1.** а) $\frac{1}{15}$; б) 0,4. **2.** $\frac{18}{29}$.

И5.3. 1. а) 0,375; б) $\frac{2}{3}$. **2.** $\frac{12}{49}$. **И6.1. 1.** а) q^8p; б) q^8; в) B. **2.** $\frac{5}{11}$.

И6.2. 1. q^2-q^8. **2.** Не менее семи чаек.

И6.3. 1. Меньше трёх. **2.** $6q^5p^2$, где $q=1-p$.

И7.1. 1. а) 0,251; б) 0,232. **2.** $\frac{63}{256}$. **И7.2. 1.** а) 0,311; б) 0,367. **2.** 0,196.

И7.3. 1. а) 0,26; б) 0,05. **2.** Одна шестёрка при 6 костях.

И8.1. 1. а) $\frac{25}{63}$; б) 0,5; **2.** $\frac{15}{28}$. **И8.2. 1.** $\frac{8}{15}$. **2.** а) Да; б) нет.

И8.3. 1. а) 0,381. **2.** 7.

И9.1. 1. а) $S=8$; б) вероятности равны. **2.** а) 18; б) $Q=XY$; в) $P(Q=12)=\frac{1}{9}$.

И9.2. 1. а) $X=4$; б) $X\leqslant 8$. **2.** а) $Q=\pi X^2$; б) нет; в) $\frac{1}{6}$;

г) $Q\sim\begin{pmatrix} \pi & 4\pi & 9\pi & 16\pi & 25\pi & 36\pi \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

И9.3. 1. $\frac{7}{36}$. **2.** а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{k-1}{k} & \frac{1}{k} \end{pmatrix}$; б) $X=I_1+I_2+\ldots+I_{25}$. **И10.1. 1.** 0. **2.** 42.

И10.2. 1. 1,04. **2.** *Указание*. Математическое ожидание случайной величины Z можно записать как $\mathrm{E}Z=z_1p_1+\ldots+z_np_n$, где z_i — значение Z, соответствующее i-му элементарному исходу с вероятностью p_i. Утверждение следует из того, что $z_i\geqslant x_i$ для всех $i=1, 2, \ldots, n$.

И10.3. 1. $\frac{91}{36}$. **2.** 1.

И11.1. 1. *Указание*. В формуле $\mathrm{E}(X-\mathrm{E}X)^2$ следует раскрыть скобки и привести подобные слагаемые, пользуясь свойствами математического ожидания. **2.** $\sqrt{a^2+b^2}$.

И11.2. 1. а) 50; 5; 10,9 %; б) 5000; 50; 1,0 %. **2.** *Указание*. Нужно воспользоваться тем, что ответы на разные вопросы независимы, и тем, что дисперсия числа успехов в одном испытании равна pq, где p и q — вероятности успеха и неудачи в этом испытании соответственно.

И11.3. 1. а) и б) 0,9. **2.** 0.

Самостоятельные работы

С1.1. 1. $A = \{\text{ОР}, \text{РО}\}$, 0,5. **2.** 0,875. **3.**

Вторая кость

Первая кость	1	2	3	4	5	6
1					×	
2				×		
3			×			
4		×				
5	×					
6						

, $\frac{5}{36}$.

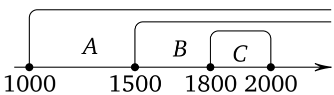
С1.2. 1. $B = \{\text{ОО}, \text{РР}\}$, 0,5. **2.** 0,375. **3.**

Вторая кость

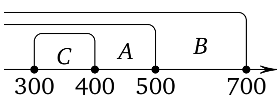
Первая кость	1	2	3	4	5	6
1		×				
2			×			
3				×		
4					×	
5						×
6						

, $\frac{5}{36}$.

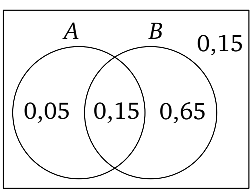
С2.1. 1. 0,95. **2.** 0,2. **3.** 0,008. **С2.2. 1.** 0,92. **2.** 0,2. **3.** 0,01.

С3.1. 1. 

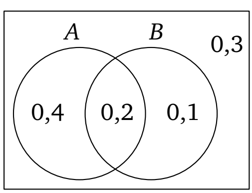
, CBA. **2.** 0,987. **3.** 0,13.

С3.2. 1. 

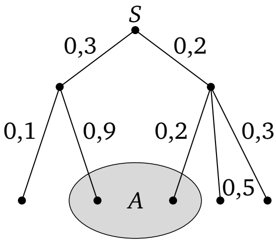
, BAC; **2.** 0,085. **3.** 0,19.

С4.1. 1. 

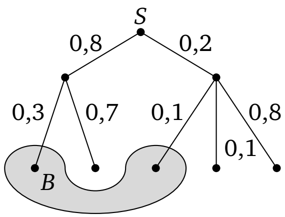
. **2.** а) Нет; б) 0,75. **3.** 0,28.

С4.2. 1. 

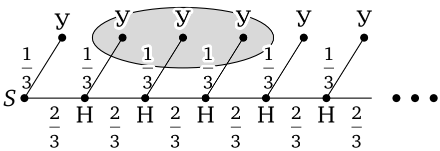
. **2.** а) Нет; б) 0,625. **3.** 0,32.

C5.1. **1.** а) 

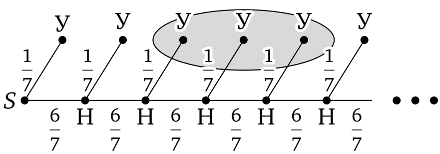
; б) 0,41. **2.** 0,67.

C5.2. **1.** а) 

; б) 0,26. **2.** 0,88.

C6.1. **1.** $\frac{1}{32}$. **2.** 

3. 0,953.

C6.2. **1.** $\frac{1}{16}$. **2.** 

3. 0,832.

C7.1. **1.** а) 16; б) 0,25. **2.** а) $q=1-p$; б) q^6+6pq^5. **3.** $\frac{21}{128}$.

C7.2. **1.** а) 32; б) $\frac{5}{16}$. **2.** а) $q=1-p$; б) q^4+4pq^3. **3.** $\frac{7}{32}$.

C8.1. **1.** $\frac{4}{7}$. **2.** а) $\frac{10}{21}$; б) $\frac{11}{42}$.

C8.2. **1.** 0,6. **2.** а) $\frac{1}{12}$; б) 0,5.

C9.1. **1.** а) $\frac{1}{6}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 11 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}375 & 0{,}625 \end{pmatrix}$.

3. а) Чётные числа от -4 до 4; б) 0,25; в) $X=\frac{1}{2}W+2$.

C9.2. **1.** а) $\frac{1}{2}$; б) $Z\sim\begin{pmatrix} -6 & 3 & 8 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$.

3. а) Нечётные числа от -3 до 3; б) 0,375; в) $X=\frac{3-W}{2}$.

C10.1. **1.** а) $\frac{22}{3}$; б) 21. **2.** 15. **3.** 9. **C10.2.** **1.** а) $\frac{15}{2}$; б) 18. **2.** -23. **3.** 3.

C11.1. **1.** 5. **2.** 1. **3.** а) 9; б) 3. **C11.2.** **1.** 5. **2.** 1. **3.** а) 16; б) 4.

Контрольные работы

КI.1

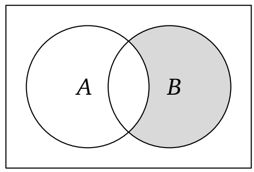
1. $A=\{$ООО, РОО, ОРР, РРР$\}$; 0,5. **2.** 0,68.

3.

Первая кость \ Вторая кость	1	2	3	4	5	6
1						
2						×
3					×	×
4				×	×	
5			×	×		
6		×	×			

, вероятность равна $\frac{1}{4}$.

4. 0,16.

5. а) «Неисправен только второй терминал», 

; б) 0,19.

6. а) $\frac{1}{3}$; б) 0,5.

КI.2

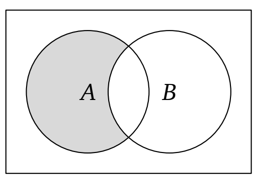
1. $A=\{$OОР, ОРР, РОО, РРО$\}$; 0,5. **2.** 0,65.

3.

Первая кость \ Вторая кость	1	2	3	4	5	6
1					×	×
2				×	×	
3			×	×		
4		×	×			
5	×	×				
6	×					

, вероятность равна $\frac{11}{36}$.

4. 0,24.

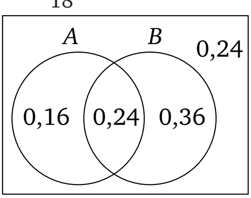
5. а) «Неисправен только первый автомат», 

; б) 0,36.

6. а) 0,25; б) 0,5.

КI.3

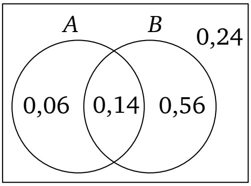
1. $\frac{1}{6}$. **2.** $\frac{13}{18}$. **3.** 0,0014. **4.** а) BCA; б) 0,81.

5. а) 

; б) 0,84. **6.** 0,029.

КI.4

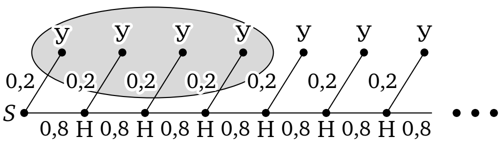
1. $\frac{1}{3}$. **2.** $\frac{5}{12}$. **3.** 0,009. **4.** а) *DAB*; б) 0,09.

5. а) 

; б) 0,44. **6.** 0,711.

КII.1

1. 0,125. **2.** а) $10p^2q^3$; б) 0,346. **3.** а) 0,172; б) 0,775.

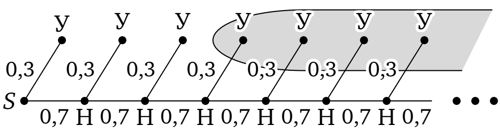
4. а) 

; б) 0,5904.

5. $\frac{3}{7}$. **6.** $\frac{2}{7}$.

КII.2

1. 0,0625. **2.** а) $10p^2q^3$; б) 0,23. **3.** а) 0,294; б) 0,503.

4. а) 

; б) 0,343.

5. $\frac{10}{21}$. **6.** $\frac{2}{7}$.

КIII.1

1. а) 0,5; б) $\begin{pmatrix} -7 & 1 & 7 \\ 0,4 & 0,1 & 0,5 \end{pmatrix}$. **2.** а) 3; б) 2,5. **3.** а) 3; б) 2.
4. 8. **5.** 8,8. **6.** 4000 рублей.

КIII.2

1. а) 0,6; б) $\begin{pmatrix} -10 & 8 & 11 \\ 0,6 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}$. **2.** а) 3; б) 2,5. **3.** а) 11; б) 7.
4. 28. **5.** 2,6. **6.** 2000 рублей.

Содержание

Магазин «Математическая книга»

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга» в Москве по адресу: Б. Власьевский пер., д. 11; тел. (499) 241-72-85; biblio.mccme.ru

Книга — почтой: http://biblio.mccme.ru/shop/order

Книги в электронном виде: http://www.litres.ru/mcnmo/

Мы сотрудничаем с интернет-магазинами

- Книготорговая компания «Абрис»; тел. (495) 229-67-59, (812) 327-04-50; www.umlit.ru, www.textbook.ru, абрис.рф
- Интернет-магазин «Книга.ру»; тел. (495) 744-09-09; www.kniga.ru

Наши партнеры в Москве и Подмосковье

- Московский Дом Книги и его филиалы (работает интернет-магазин); тел. (495) 789-35-91; www.mdk-arbat.ru
- Магазин «Молодая Гвардия» (работает интернет-магазин): ул. Б. Полянка, д. 28; тел. (499) 238-50-01, (495) 780-33-70; www.bookmg.ru
- Магазин «Библио-Глобус» (работает интернет-магазин): ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1; тел. (495) 781-19-00; www.biblio-globus.ru
- Спорткомплекс «Олимпийский», 5-й этаж, точка 62; тел. (903) 970-34-46
- Сеть киосков «Аргумент» в МГУ; тел. (495) 939-21-76, (495) 939-22-06; www.arg.ru
- Сеть магазинов «Мир школьника» (работает интернет-магазин); тел. (495) 715-31-36, (495) 715-59-63, (499) 182-67-07, (499) 179-57-17; www.uchebnik.com
- Сеть магазинов «Шаг к пятерке»; тел. (495) 728-33-09, (495) 346-00-10; www.shkolkniga.ru
- Издательская группа URSS, Нахимовский проспект, д. 56, Выставочный зал «Науку — Всем», тел. (499) 724-25-45, www.urss.ru
- Книжный магазин издательского дома «Интеллект» в г. Долгопрудный: МФТИ (новый корпус); тел. (495) 408-73-55

Наши партнеры в Санкт-Петербурге

- Санкт-Петербургский Дом книги: Невский пр-т, д. 62; тел. (812) 314-58-88
- Магазин «Мир науки и медицины»: Литейный пр-т, д. 64; тел. (812) 273-50-12
- Магазин «Новая техническая книга»: Измайловский пр-т, д. 29; тел. (812) 251-41-10
- Информационно-книготорговый центр «Академическая литература»: Васильевский остров, Менделеевская линия, д. 5
- Киоск в здании физического факультета СПбГУ в Петергофе; тел. (812) 328-96-91, (812) 329-24-70, (812) 329-24-71
- Издательство «Петроглиф»: Фарфоровская, 18, к. 1; тел. (812) 560-05-98, (812) 943-80-76; k_i_@bk.ru, k_i_@petroglyph.ru
- Сеть магазинов «Учебная литература»; тел. (812) 746-82-42, тел. (812) 764-94-88, тел. (812) 235-73-88 (доб. 223)

Наши партнеры в Челябинске

- Магазин «Библио-Глобус», ул. Молдавская, д. 16, www.biblio-globus.ru

Наши партнеры в Украине

- Александр Елисаветский. Рассылка книг наложенным платежом по Украине: тел. 067-136-37-35; df-al-el@bk.ru