ГИА-9

Методика проверки и оценки алгебраических заданий повышенного и высокого уровня сложности с развернутым ответом

Подготовила:
Большакова О.В., председатель региональной предметной комиссии;

17.01.2023

Принципы системы оценивания заданий с развернутым ответом

1. Возможны различные способы и записи развернутого решения. Главное требование – ***решение должно быть математически грамотным***, из него ***должен быть понятен ход рассуждений автора работы.***
2. При решении задач можно использовать без доказательства и ссылок математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, рекомендованных к использованию при реализации ФГОС ООО.
3. Не следует требовать от учащихся слишком подробных комментариев. Лаконичное решение, не содержащее неверных утверждений, все выкладки которого правильны, следует рассматривать как решение без недочетов.

Общие подходы к оцениванию заданий с развернутыми ответами

Каждое из заданий второй части оценивается ***в 2 балла***.

- Задание считается выполненным верно, если обучающийся выбрал правильный путь решения; из письменной записи решения понятен ход его рассуждений, получен верный ответ. В этом случае выставляется полный балл, соответствующий данному заданию.
- Если в решении допущена ошибка (или описка), не имеющая принципиального характера и не влияющая на общую правильность хода решения, то участнику выставляется 1 балл

Задание 20

Критерии оценивания выполнения задания 20

Баллы	Содержание критерия
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

Уточнение – «*ошибка вычислительного характера*» или «*вычислительная ошибка*» – это ошибка, допущенная при выполнении сложения, вычитания, умножения и деления.

В критериях оценки выполнения задания подчеркивается тот факт, что 1 балл допускается ставить в тех случаях, когда ***единственная*** вычислительная ошибка стала причиной того, что неверен ответ.

К вычислительным ошибкам не относятся ошибки:

✓в формулах при решении квадратного уравнения;

✓действиях с числами с разными знаками;

✓при упрощении выражений со степенями и корнями и т.д.

Пример оценивания задания 20

Решите уравнение $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0$.

Ответ: $x=1,5$, $x=0,8$.

№ 21

$$\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0$$

О.Д.З.

$(x-1)^2 \neq 0$

$x-1 \neq 0$

$x \neq 1$;

$$\frac{1+3(x-1)-10(x-1)^2}{(x-1)^2}=0$$

$1+3x-3-10(x^2-2x+1)=0$

$1+3x-3-10x^2+20x-10=0$

$-10x^2+23x-12=0$

$D=b^2-4ac$, $D=529-480=49=\pm 7^2$

$x_1=\frac{-23+7}{-20}=1,5$ $x_2=\frac{23-7}{-20}=\frac{-16}{20}=0,8$

Ответ: 1,5; 0,8

Пример оценивания задания 20

Решите уравнение $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0$.

Ответ: $x=1{,}5$, $x=0{,}8$.

№: 21

$$\frac{1}{(x-1)^2}+\overset{x-1}{\frac{3}{x-1}}-\overset{(x-1)^2}{10}=0$$

О.Д.З.

$(x-1)^2\neq 0$

$x-1\neq 0$

$x\neq 1;$

$$\frac{1+3(x-1)-10(x-1)^2}{(x-1)^2}=0$$

$$1+3x-3-10(x^2-2x+1)=0$$

$$1+3x-3-10x^2+20x-10=0$$

$$-10x^2+23x-12=0$$

$$D=b^2-4ac,\quad D=529-480=49=\pm 7^2$$

$$x_1=\frac{-23+7}{-20}=\cancel{}\ 1{,}5 \qquad x_2=\frac{23-7}{-20}=\frac{-16}{20}=\overset{0{,}8}{\cancel{}}$$

Ответ: ~~___~~ 1,5; 0,8

Комментарий:

1.В решении записан верный ответ.

2. Но в последних строках решения присутствуют:

а) ошибка в вычислении корня квадратного уравнения;

б) ошибка при сложении чисел с разными знаками;

в) ошибка в формуле корней квадратного уравнения;

г) ошибка при делении чисел с разными знаками.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример № 2 оценивания задания 20

Решите уравнение $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0$.

Ответ: $x=1{,}5$, $x=0{,}8$.

(21) $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{(x-1)}-10=0$

1) Пусть $(x-1)=t$, тогда:

$\frac{1}{t^2}+\frac{3}{t}^{|t}-10^{|t^2}=0$

$\frac{1+3t-10t^2}{t^2}=0 \qquad t^2\neq 0$

$\Rightarrow -10t^2+3t+1=0 \quad |(-1)$

$10t^2+3t-1=0$

$D=9+\overbrace{4\cdot1\cdot10}^{40}=49$

$\sqrt{D}=7$

$t_1=\frac{3+7}{20}=0{,}5$

$t_2=\frac{3-7}{20}=\frac{-1}{5}=-0{,}2$

2) $(x-1)=t$, следовательно:

- $x-1=0{,}5$

  $x=1{,}5$

- $x-1=-0{,}2$

  $x=1-0{,}2=0{,}8$

Ответ: $-0{,}2$ и $0{,}8$.

Пример № 2 оценивания задания 20

Решите уравнение $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0$.

Ответ: $x=1{,}5$, $x=0{,}8$.

Комментарий:

1.Все этапы решения присутствуют.

2.Корни найдены верно(запись в правом столбце решения).

3.Ответ записан неверно.

Оценка эксперта: 1 балл.

(21) $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{(x-1)}-10=0$

1) Пусть $(x-1)=t$, тогда:

$\frac{1}{t^2}+\frac{3}{t}^{|t}-10^{|t^2}=0$

$\frac{1+3t-10t^2}{t^2}=0 \qquad t^2\neq0$

$\Rightarrow -10t^2+3t+1=0 \quad |(-1)$

$10t^2+3t-1=0$

$D=9+\overset{40}{4\cdot1\cdot10}=49$

$\sqrt{D}=7$

$t_1=\frac{3+7}{20}=0{,}5$

$t_2=\frac{3-7}{20}=\frac{-1}{5}=-0{,}2$

Ответ: $-0{,}2$ и $0{,}8$.

2) $(x-1)=t$, следовательно:

- $x-1=0{,}5$

  $x=1{,}5$

- $x-1=-0{,}2$

  $x=1-0{,}2=0{,}8$

Пример № 3 оценивания задания 20

Решите уравнение $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0$.

Ответ: $x=1{,}5$, $x=0{,}8$.

21) $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}^{(x-1}-10^{((x-1)(x-1)}=0$; $\frac{1}{(x-1)(x-1)}+\frac{3(x-1)}{(x-1)(x-1)}-\frac{10(x-1)(x-1)}{(x-1)(x-1)}=0$;

$1+3(x-1)-10(x-1)(x-1)=0$, если $x\neq1$

$1+3x-3-10(x-1)^2=0$;

$-2+3x-10x^2+20x-10=0$;

$-10x^2+23x-12=0 \mid\cdot(-1)$;

$10x^2-23x+12=0$;

$D=b^2-4ac$; $D=529-4\cdot10\cdot12=529-480=49$

$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{23+49}{2\cdot10}=\frac{72}{20}=3{,}6$; $x_2=\frac{23-49}{20}=-\frac{26}{20}=-1\frac{6}{20}^{(5}=-1{,}3$

Ответ: $-1{,}3$; $3{,}6$

Пример № 3 оценивания задания 20

Решите уравнение $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0$.

Ответ: $x=1,5$, $x=0,8$.

Комментарий:

1. При нахождении корней квадратного уравнения допущена ошибка: при наличии общей формулы для нахождения корней квадратного уравнения, записанной верно, *не извлечен корень из дискриминанта* при вычислении корней.

Оценка эксперта: 0 баллов.

21) $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0$; $\frac{1}{(x-1)(x-1)}+\frac{3(x-1)}{(x-1)(x-1)}-\frac{10(x-1)(x-1)}{(x-1)(x-1)}=0$;

$1+3(x-1)-10(x-1)(x-1)=0$, если $x\neq 1$

$1+3x-3-10(x-1)^2=0$;

$-2+3x-10x^2+20x-10=0$;

$-10x^2+23x-12=0 \mid\cdot(-1)$;

$10x^2-23x+12=0$;

$D=b^2-4ac$; $D=529-4\cdot10\cdot12=529-480=49$

$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{23+49}{2\cdot10}=\frac{72}{20}=3,6$; $x_2=\frac{23-49}{20}=-\frac{26}{20}=-1\frac{6}{20}=-1,3$

Ответ: $-1,3$; $3,6$

Пример № 4 оценивания задания 20

Пример 2.

Решите уравнение $\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}-12=0$.

Ответ: $x=0{,}5$, $x=-\frac{1}{6}$.

$\boxed{21}$ $\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}-12=0$

$1+4x-12x^2=0$ ОДЗ: $x\neq 0$

$12x^2-4x-1=0$

$12x^2-6x+2x-1=0$

$(2x-1)(6x+1)=0$

$x=\frac{1}{2}=0{,}5 \vee x=-\frac{1}{6}$

Пр.: ✓ ✓

$\boxed{\text{Ответ: } 0{,}5;\ -\frac{1}{6}}$

Пример № 4 оценивания задания 20

Пример 2.

Решите уравнение $\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}-12=0$.

Ответ: $x=0{,}5$, $x=-\frac{1}{6}$.

$\boxed{21}$ $\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}-12=0$

$1+4x-12x^2=0$ ОДЗ: $x\neq 0$

$12x^2-4x-1=0$

$12x^2-6x+2x-1=0$

$(2x-1)(6x+1)=0$

$x=\frac{1}{2}=0{,}5 \vee x=-\frac{1}{6}$

Пр.: $\checkmark$ $\checkmark$

$\boxed{\text{Ответ: } 0{,}5;-\frac{1}{6}}$

Комментарий:

1. Правильно выполнены преобразования.
2. Получен верный ответ.

Оценка эксперта:
2 балла.

Пример № 5 оценивания задания 20

Пример 2.

Решите уравнение $\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}-12=0$.

Ответ: $x=0{,}5$, $x=-\frac{1}{6}$.

Комментарий:

1. Правильно выполнены преобразования, получен верный ответ.

Оценка эксперта:
2 балла.

N 21

$\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}-12=0; \,\Big|\cdot x^2$

$x\neq 0$

$1+4x-12x^2=0;$

$12x^2-4x-1=0;$

$D_1=\cancel{\frac{4+12}{12}}=\frac{16}{12}=$

$\boxed{D_1=k^2-ac}$

$D_1=4+12=16.$

$D_1>0$, уравнение имеет 2 корня:

$x=\frac{-k\pm\sqrt{D_1}}{a}$

$x=\frac{2\pm 4}{12}$

$\left[\begin{array}{l} x=0{,}5, \\ x=-\frac{1}{6}. \end{array}\right.$

Ответ: $0{,}5; -\frac{1}{6}.$

Пример № 6 оценивания задания 20

Решите уравнение $\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}-12=0$.

Ответ: $x=0{,}5$, $x=-\frac{1}{6}$.

Комментарий:

1.Все этапы решения присутствуют.

2.Корни найдены верно.

3. Неверная запись ответа свидетельствует ***о неверном владении символикой*** *как при записи корней квадратного уравнения (знак системы),*

так и *при записи множества корней исходного уравнения (ответ в круглых скобках).*

Оценка эксперта:

1 балл (но допустимо и 0 баллов)!

№21.

$\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}-12=0$

$\frac{1}{x}=t$

$t^2+4t-12=0$

$D=16+48=64$

$\begin{cases} t=\frac{-4+8}{2}=2 \\ t=\frac{-4-8}{2}=-6 \end{cases}$

$\frac{1}{x}=2$ или $\frac{1}{x}=-6$

$x=\frac{1}{2}$ или $x=-\frac{1}{6}$

Ответ: $(-\frac{1}{6};\frac{1}{2})$

Задание 21

В критериях не образец решения, а схема для проверки работ экспертом!

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

21 Два автомобиля одновременно отправляются в 240-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 20 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 1 ч раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.

Решение.

Пусть скорость первого автомобиля v км/ч, тогда скорость второго автомобиля $v-20$ км/ч. Получаем уравнение:

$$\frac{240}{v-20}-\frac{240}{v}=1;\ 240v-240v+4800=v^2-20v;\ v^2-20v-4800=0,$$

откуда $v=80$.

Ответ: 80 км/ч.

Пример № 1 оценивания задания 21

2 балла

22) Пусть x км/ч – скорость второго автомобиля, а $(x+20)$ км/ч – скорость первого автомобиля. Зная, что оба автомобиля преодолели 240 км, составим таблицу и выразим время.

	v, км/ч	t, ч	S, км
1 автомобиль	$x+20$	$\frac{240}{x+20}$	240
2 автомобиль	x	$\frac{240}{x}$	240

Зная, что первый автомобиль закончил свой маршрут на 1 час раньше, чем второй, составим и решим уравнение

$$\frac{240}{x}-\frac{240}{x+20}=1$$

$$\begin{cases}\frac{240}{x}-\frac{240}{x+20}=1\\ x\neq 0\\ x\neq -20\end{cases}$$

$$\frac{240(x+20)-240\cdot(x)-1(x+20)\cdot x}{x(x+20)}=0,$$

$$\frac{240x+4800-240x-x^2-20x}{x(x+20)}=0,$$

$$-x^2-20x+4800=0,$$

$$x^2+20x-4800=0$$

$$D=400-4\cdot1\cdot(-4800)=400+19200=19600=140^2$$

$$x_{1,2}=\frac{-20\pm140}{2}\begin{cases}\frac{120}{2}=60\\ \frac{-160}{2}=-80\end{cases}$$ – не удовлетворяет условию задачи

Значит, скорость второго автомобиля равна 60 км/ч. Найдём скорость первого автомобиля

$x+20=60+20=80$ (км/ч)

Ответ: 80 км/ч

Пример № 2 оценивания задания 21

21 Два автомобиля одновременно отправляются в 240-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 20 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 1 ч раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.

Решение.

Пусть скорость первого автомобиля v км/ч, тогда скорость второго автомобиля $v-20$ км/ч. Получаем уравнение:

$$\frac{240}{v-20}-\frac{240}{v}=1;\ 240v-240v+4800=v^2-20v;\ v^2-20v-4800=0,$$

откуда $v=80$.

Ответ: 80 км/ч.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

22. Пусть $\vartheta_1 = x$ км/ч

	ϑ, км/ч	t, ч	S, км
1	x	$\frac{240}{x}$ (М)	240
2	$x-20$	$\frac{240}{x-20}$ (Б)	240

на 1

Значит, $\frac{240}{x-20} - \frac{240}{x} - 1 = 0$ | $\cdot x(x-20)$

$$\frac{240x - 240x + 4800 - x^2 + 20x}{x(x-20)} = 0$$

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 20 \\ x^2 - 20x - 4800 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 20 \\ \left[\begin{array}{l} x = 80 \\ x = -60 \end{array}\right. \end{cases}$$

$\vartheta_1 = -60$ км/ч – не удовл по усл задачи $\Rightarrow \vartheta_1 = 80$ км/ч

Ответ: 80 км/ч.

Пример № 2 оценивания задания 21

Комментарий:

1. Ход решения верный.
2. Получен верный ответ.

Оценка эксперта:
2 балла.

22. Пусть $v_1 = x$ км/ч

	v, км/ч	t, ч	S, км
1	x	$\frac{240}{x}$	240
2	$x-20$	$\frac{240}{x-20}$	240

на 1

Значит, $\frac{240}{x-20} - \frac{240}{x} - 1 = 0$

$$\frac{240x - 240x + 4800 - x^2 + 20x}{x(x-20)} = 0$$

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 20 \\ x^2 - 20x - 4800 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 20 \\ \left[\begin{array}{l} x = 80 \\ x = -60 \end{array}\right. \end{cases}$$

$v_1 = -60$ км/ч – не удовл по усл задачи $\Rightarrow v_1 = 80$ км/ч

Ответ: 80 км/ч.

Пример № 3 оценивания задания 21

Игорь и Паша могут покрасить забор за 14 часов, Паша и Володя – за 15 часов, а Володя и Игорь за 30 часов. За какое время покрасят забор мальчики, работая втроем. Ответ дайте в минутах.

Ответ: 700 минут.

N 22. ~~Пусть~~

Найти: $\frac{1}{x+y+z}$.

	Мощн Произв	Время	Работа
Игорь	x	$\frac{1}{x}$	1
Паша	y	$\frac{1}{y}$	1
Володя	z	$\frac{1}{z}$.	1

1) $\begin{cases} \frac{1}{x+y} = 14; \\ \frac{1}{y+z} = 15; \\ \frac{1}{x+z} = 30; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y = \frac{1}{14} \\ y+z = \frac{1}{15} \\ x+z = \frac{1}{30} \end{cases}$ $\begin{cases} x+y = \frac{1}{14} \\ y = \frac{1}{15} - z \\ x = \frac{1}{30} - z. \end{cases}$

② $\frac{1}{15} - z + \frac{1}{30} - z = \frac{1}{14}$, $\frac{3}{30} - 2z = \frac{1}{14}$, $2z = \frac{3}{30} - \frac{1}{14}$, $2z = \frac{1}{10} - \frac{1}{14}$; $2z = \frac{4}{140}$; $2z = \frac{1}{35}$; $z = \frac{1}{70}$.

③ $y = \frac{1}{15} - \frac{1}{70} = \frac{70-15}{1050} = \frac{55}{1050} = \frac{11}{210}$

④ $x = \frac{1}{30} - \frac{1}{70} = \frac{7-3}{210} = \frac{4}{210} = \frac{2}{105}$

⑤ $\frac{1}{x+y+z} = \frac{1}{\frac{1}{70} + \frac{11}{210} + \frac{2}{105}} = \frac{1}{\frac{3+11+4}{210}} = \frac{210}{18} = \frac{70}{6}$

В 1 часе 60 минут, тогда $\Rightarrow \frac{70}{6} \cdot 60 = 700$ мин.

Ответ: 700 мин.

Пример № 3 оценивания задания 21

Игорь и Паша могут покрасить забор за 14 часов, Паша и Володя – за 15 часов, а Володя и Игорь за 30 часов. За какое время покрасят забор мальчики, работая втроем. Ответ дайте в минутах.
Ответ: 700 минут.

№ 22. ~~Пусть~~.
Найти: $\frac{1}{x+y+z}$.

	Мощн. Произв.	Время	Работа
Игорь	x	$\frac{1}{x}$	1
Паша	y	$\frac{1}{y}$	1
Володя	z	$\frac{1}{z}$	1

1) $\begin{cases} \frac{1}{x+y}=14; \\ \frac{1}{y+z}=15; \\ \frac{1}{x+z}=30; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=\frac{1}{14} \\ y+z=\frac{1}{15} \\ x+z=\frac{1}{30} \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=\frac{1}{14} \\ y=\frac{1}{15}-z \\ x=\frac{1}{30}-z. \end{cases}$

2) $\frac{1}{15}-z+\frac{1}{30}-z=\frac{1}{14}$, $\frac{3}{30}-2z=\frac{1}{14}$, $2z=\frac{3}{30}-\frac{1}{14}$, $2z=\frac{1}{10}-\frac{1}{14}$; $2z=\frac{4}{140}$; $2z=\frac{1}{35}$; $z=\frac{1}{70}$.

3) $y=\frac{1}{15}-\frac{1}{70}=\frac{70-15}{1050}=\frac{55}{1050}=\frac{11}{210}$

4) $x=\frac{1}{30}-\frac{1}{70}=\frac{7-3}{210}=\frac{4}{210}=\frac{2}{105}$

5) $\frac{1}{x+y+z}=\frac{1}{\frac{1}{70}+\frac{11}{210}+\frac{2}{105}}=\frac{1}{\frac{3+11+4}{210}}=\frac{210}{18}=\frac{70}{6}$

В 1 часе 60 минут, тогда $\Rightarrow \frac{70}{6}\cdot 60=700$ мин.
Ответ: 700 мин.

Комментарий:
1. Ход решения верный.
2. Получен верный ответ.

Оценка эксперта:
2 балла.

Пример № 4

Игорь и Паша могут покрасить забор за 20 часов, Паша и Володя – за 21 час, а Володя и Игорь за 28 часов. За какое время покрасят забор мальчики, работая втроем. Ответ дайте в минутах.
Ответ: 900 минут.

Комментарий:
1. Ход решения верный.
2. Получен верный ответ.

Оценка эксперта:
2 балла.

№ 22

1) Пусть работа, которую нужно сделать во всех случаях равна 1.
2) Пусть производительность труда Игоря – x, Паши – y, а Володи – z
3) Тогда: производительность труда Игоря и Паши = $x+y=\frac{1}{20}$ (ч
Паши и Володи – $y+z=\frac{1}{21}$ (часа)
Володи и Игоря – $z+x=\frac{1}{28}$ (часа)
4) Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y=\frac{1}{20} \\ y+z=\frac{1}{21} \\ z+x=\frac{1}{28} \end{cases}$$

$$x=\frac{1}{20}-y$$
$$z=\frac{1}{21}-y$$
$$\frac{1}{20}-y+\frac{1}{21}-y=\frac{1}{28}$$
$$-2y=\frac{1}{28}-\frac{1}{20}-\frac{1}{21}$$
$$-2y=\frac{15-20-21}{420}$$
$$-2y=\frac{-26}{420}$$
$$y=\frac{13}{420}$$
$$x=\frac{1}{20}-\frac{13}{420}$$
$$x=\frac{21}{420}-\frac{13}{420}$$
$$x=\frac{8}{420}$$
$$z=\frac{1}{21}-\frac{13}{420}$$
$$z=\frac{20}{420}-\frac{13}{420}$$
$$z=\frac{7}{420}$$

5) Таким образом производительность всех мальчиков:
$\frac{8}{420}+\frac{7}{420}+\frac{13}{420}=\frac{28}{420}$ – в час, а в минуту: $\frac{28}{420\cdot60}$
6) Время за которое она выполнят работу:
$1:\frac{28}{420\cdot60}=\frac{420\cdot60}{28}=\frac{60\cdot60}{4}=900$ минут
Ответ: за 900 минут мальчики прокрасят забор, работая втроём.

Пример № 5 оценивания задания 21

Игорь и Паша могут покрасить забор за 14 часов, Паша и Володя – за 15 часов, а Володя и Игорь за 30 часов. За какое время покрасят забор мальчики, работая втроем. Ответ дайте в минутах.

Ответ: 700 минут.

№22

И+П=14

П+В=15

В+И=30

$$\begin{cases} x+y=\frac{1}{14} \\ y+z=\frac{1}{15} \\ z+x=\frac{1}{30} \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=\frac{1}{14} \\ y=\frac{1}{15}-z \\ x=\frac{1}{30}-z \end{cases}$$

$$\frac{1}{15}-z+\frac{1}{30}-z=\frac{1}{14}$$

$$-2z+\frac{3}{30}=\frac{1}{14}$$

$$-2z=\frac{1}{14}-\frac{3}{30}$$

$$-2z=\frac{30-42}{420}$$

$$2z=\frac{12}{420}$$

$$z=\frac{12}{420}:2=\frac{12}{420}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{70}$$

$$y=\frac{1}{15}-\frac{1}{70}=\frac{70-15}{1050}=\frac{55}{1050}$$

$$x=\frac{1}{30}-\frac{1}{70}=\frac{70-30}{2100}=\frac{40}{2100}=\frac{4}{210}$$

$$\frac{1}{70}+\frac{55}{1050}+\frac{4}{210}=\frac{7}{210}+\frac{55}{1050}=\frac{1}{30}+\frac{55}{1050}=\frac{1050+1650}{31500}=$$

$$=\frac{2700}{31500}=\frac{27}{315}\ (ч)$$

$$\frac{27}{315}\cdot\frac{60}{1}=\frac{1620}{315}=5\frac{45}{315}=5\frac{1}{7}\ (минут)$$

Ответ: $5\frac{1}{7}$ (минут)

Пример № 5 оценивания задания 21

Игорь и Паша могут покрасить забор за 14 часов, Паша и Володя – за 15 часов, а Володя и Игорь за 30 часов. За какое время покрасят забор мальчики, работая втроем. Ответ дайте в минутах.
Ответ: 700 минут.

Комментарий:
Логическая ошибка – выпускник перепутал производительность и время.

Оценка эксперта:
0 баллов.

№ 22

И + П = 14
П + В = 15
В + И = 30

$$\begin{cases} x+y=\frac{1}{14} \\ y+z=\frac{1}{15} \\ z+x=\frac{1}{30} \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=\frac{1}{14} \\ y=\frac{1}{15}-z \\ x=\frac{1}{30}-z \end{cases}$$

$$\frac{1}{15}-z+\frac{1}{30}-z=\frac{1}{14}$$

$$-2z+\frac{3}{30}=\frac{1}{14}$$

$$-2z=\frac{1}{14}-\frac{3}{30}$$

$$-2z=\frac{30-42}{420}$$

$$2z=\frac{12}{420}$$

$$z=\frac{12}{420}:2=\frac{12}{420}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{70}$$

$$y=\frac{1}{15}-\frac{1}{70}=\frac{70-15}{1050}=\frac{55}{1050}$$

$$x=\frac{1}{30}-\frac{1}{70}=\frac{70-30}{2100}=\frac{40}{2100}=\frac{4}{210}$$

$$\frac{1}{70}+\frac{55}{1050}+\frac{4}{210}=\frac{7}{210}+\frac{55}{1050}=\frac{1}{30}+\frac{55}{1050}=\frac{1050+1650}{31500}=$$

$$=\frac{2700}{31500}=\frac{27}{315}\ (\text{ч})$$

$$\frac{27}{315}\cdot\frac{60}{1}=\frac{1620}{315}=5\frac{45}{315}=5\frac{1}{7}\ (\text{минут})$$

Ответ: $5\frac{1}{7}$ (минут)

Пример № 6 оценивания задания 21

Игорь и Паша могут покрасить забор за 14 часов, Паша и Володя – за 15 часов, а Володя и Игорь за 30 часов. За какое время покрасят забор мальчики, работая втроем. Ответ дайте в минутах.
Ответ: 700 минут.

22

	P	t	A
	$x+y$	$\frac{1}{x+y}$	1
	$y+z$	$\frac{1}{y+z}$	1
	$z+x$	$\frac{1}{z+x}$	1

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y}=14 \\ \frac{1}{y+z}=15 \\ \frac{1}{z+x}=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\frac{1}{14} \\ y+z=\frac{1}{15} \\ z+x=\frac{1}{30} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{14}-x \\ \frac{1}{14}-x+\left(\frac{1}{30}-x\right)=\frac{1}{15} \quad (*) \\ z=\frac{1}{30}-x \end{cases}$$

$$y=\frac{1}{2\cdot 7}-\frac{4}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7}=\frac{11}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7}$$

$$z=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5}-\frac{4}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7}=\frac{3}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7}$$

$$* \quad \frac{1}{14}-x+\frac{1}{30}-x=\frac{1}{15}$$

$$-2x=\frac{1}{15}-\frac{1}{30}-\frac{1}{14}$$

$$-2x=\frac{1}{3\cdot 5}-\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5}-\frac{1}{7\cdot 2}$$

$$-2x=\frac{14-7-15}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7}$$

$$-2x=\frac{-8}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7}$$

$$x=\frac{4}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7}$$

$$\frac{1}{x+y+z}=\frac{1}{\frac{4}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\frac{11}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\frac{3}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7}}=\frac{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{18}=\frac{35}{2}=17.5 \text{ ч}$$

$= 1050$ мин

Ответ 1050 мин

Пример № 6 оценивания задания 21

Игорь и Паша могут покрасить забор за 14 часов, Паша и Володя – за 15 часов, а Володя и Игорь за 30 часов. За какое время покрасят забор мальчики, работая втроем. Ответ дайте в минутах.
Ответ: 700 минут.

Комментарий:
Вычислительная ошибка на последнем шаге.

Оценка эксперта:
1 балл.

22

p	t	A
$x+y$	$\frac{1}{x+y}$	1
$y+z$	$\frac{1}{y+z}$	1
$z+x$	$\frac{1}{z+x}$	1

$$\begin{cases}\frac{1}{x+y}=14\\ \frac{1}{y+z}=15\\ \frac{1}{z+x}=30\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=\frac{1}{14}\\ y+z=\frac{1}{15}\\ z+x=\frac{1}{30}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\frac{1}{14}-x\\ \frac{1}{14}-x+\left(\frac{1}{30}-x\right)=\frac{1}{15} \quad (*)\\ z=\frac{1}{30}-x\end{cases}$$

$$y=\frac{1}{2\cdot7}-\frac{4}{2\cdot3\cdot5\cdot7}=\frac{11}{2\cdot3\cdot5\cdot7}$$

$$z=\frac{1}{2\cdot3\cdot5}-\frac{4}{2\cdot3\cdot5\cdot7}=\frac{3}{2\cdot3\cdot5\cdot7}$$

$$* \ \frac{1}{14}-x+\frac{1}{30}-x=\frac{1}{15}$$

$$-2x=\frac{1}{15}-\frac{1}{30}-\frac{1}{14}$$

$$-2x=\frac{1}{3\cdot5}-\frac{1}{2\cdot3\cdot5}-\frac{1}{7\cdot2}$$

$$-2x=\frac{14-7-15}{2\cdot3\cdot5\cdot7}$$

$$-2x=\frac{-8}{2\cdot3\cdot5\cdot7}$$

$$x=\frac{4}{2\cdot3\cdot5\cdot7}$$

$$\frac{1}{x+y+z}=\frac{1}{\frac{4}{2\cdot3\cdot5\cdot7}+\frac{11}{2\cdot3\cdot5\cdot7}+\frac{3}{2\cdot3\cdot5\cdot7}}=\frac{2\cdot3\cdot5\cdot7}{18}=\frac{35}{2}=17.5\text{ ч}$$

$= 1050$ мин

Ответ 1050 мин

Пример № 7 оценивания задания 21

Игорь и Паша могут покрасить забор за 20 часов, Паша и Володя – за 21 час, а Володя и Игорь за 28 часов. За какое время покрасят забор мальчики, работая втроем. Ответ дайте в минутах.
Ответ: 900 минут.

№ 22

Пусть Игорь – x, Паша – y, Володя – z. Составим таблицу.

	v	t	A
x, y	$\frac{1}{20}$ з/ч.	20 ч	1 з.
y, z	$\frac{1}{21}$ з/ч	21 ч	1 з
x и z	$\frac{1}{28}$ з/ч	28 ч	1 з

Составим систему

$$\begin{cases} x+y=\frac{1}{20} \\ y+z=\frac{1}{21} \\ z+x=\frac{1}{28} \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\frac{1}{20}-y \\ y=\frac{1}{21}-z \\ z=\frac{1}{28}-x \end{cases}$$

Составим и решим уравнение

$$x=\frac{1}{20}-\left(\frac{1}{21}-\left(\frac{1}{28}-x\right)\right)$$

$$x=\frac{1}{20}-\frac{1}{21}+\frac{1}{28}-x$$

$$2x=\frac{16}{420}$$

$$2x=\frac{4}{105}$$

$$x=\frac{2}{105}$$

Т.к. $y+z=\frac{1}{21}$, то

$$x+y+z=\frac{1}{21}+\frac{2}{105}.$$

$$x+y+z=\frac{7}{105} \text{ з/ч.}$$

$$t=\frac{A}{v}$$

$$t=\frac{1}{\frac{7}{105}}$$

$t=15$ ч

Ответ: 15 часов.

Пример № 7 оценивания задания 21

Игорь и Паша могут покрасить забор за 20 часов, Паша и Володя – за 21 час, а Володя и Игорь за 28 часов. За какое время покрасят забор мальчики, работая втроем. Ответ дайте в минутах.
Ответ: 900 минут.

№22

Пусть Игорь – x, Паша – y, Володя – z. Составим таблицу.

	v	t	A
x, y	$\frac{1}{20}$ з/ч.	20 ч	1 з.
y, z	$\frac{1}{21}$ з/ч	21 ч	1 з
x и z	$\frac{1}{28}$ з/ч	28 ч	1 з

Составим систему

$$\begin{cases} x+y=\frac{1}{20} \\ y+z=\frac{1}{21} \\ z+x=\frac{1}{28} \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\frac{1}{20}-y \\ y=\frac{1}{21}-z \\ z=\frac{1}{28}-x \end{cases}$$

Составим и решим уравнение

$$x=\frac{1}{20}-\left(\frac{1}{21}-\left(\frac{1}{28}-x\right)\right)$$

$$x=\frac{1}{20}-\frac{1}{21}+\frac{1}{28}-x$$

$$2x=\frac{16}{420}$$

$$2x=\frac{4}{105}$$

$$x=\frac{2}{105}$$

Т.к. $y+z=\frac{1}{21}$, то

$$x+y+z=\frac{1}{21}+\frac{2}{105}.$$

$$x+y+z=\frac{7}{105} \text{ з/ч.}$$

$$t=\frac{A}{v}$$

$$t=\frac{1}{\frac{7}{105}}$$

$t=15$ ч

Ответ: 15 часов.

Комментарий:
В методических рекомендациях предлагается поставить 1 балл (приравнять к вычислительной ошибке).

Оценка эксперта:
1 балл.

Сложная работа для оценивания.
Не выполнено задание: «Ответ дайте в минутах».
В критериях такая ситуация не предусмотрена.

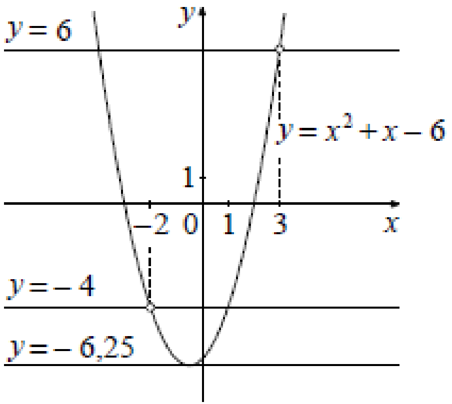
Задача 22.

Постройте график функции $y=\dfrac{x^4-13x^2+36}{(x-3)(x+2)}$ и определите, при каких значениях c прямая $y=c$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение. Разложим числитель дроби на множители:

$$x^4-13x^2+36=(x^2-4)(x^2-9)=(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)$$

При $x\neq-2$ и $x\neq3$ функция принимает вид: $y=(x-2)(x+3)=x^2+x-6$, её график — парабола, из которой выколоты точки $(-2;-4)$ и $(3;6)$.



Прямая $y=c$ имеет с графиком ровно одну общую точку либо тогда, когда проходит через вершину параболы, либо тогда, когда пересекает параболу в двух точках, одна из которых — выколотая. Вершина параболы имеет координаты $(-0,5;-6,25)$.

Поэтому $c=-6,25$, $c=-4$ или $c=6$.

Задание 22

Критерии оценивания выполнения задания 22

Баллы	Содержание критерия
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

Основным условием положительной оценки за решение задания является верное построение графика.

Верное построение графика включает в себя:

- ✓обоснование (объяснение) построения;
- ✓содержательная таблица значений;
- ✓масштаб.

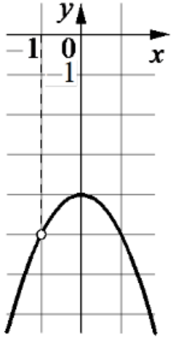
Выколотая точка обозначена в соответствии с ее координатами.

Пример № 1 оценивания задания 22

Постройте график функции $y=\dfrac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

Преобразуем выражение: $\dfrac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x}=-x^2-4$ при условии, что $x\neq-1$. Построим график (см. рисунок).



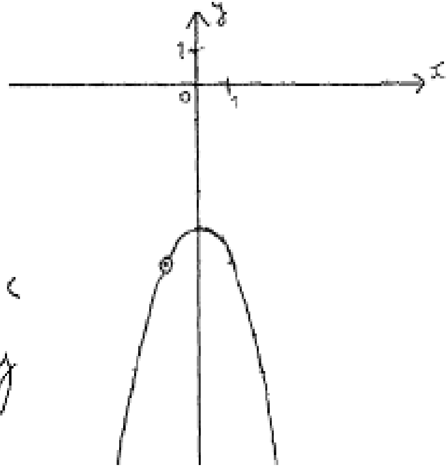
Прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку, если она проходит через точку $(-1;-5)$ или если уравнение $-x^2-4=kx$ имеет один корень. Дискриминант уравнения $x^2+kx+4=0$ равен k^2-16, и он должен быть равен нулю. Получаем, что $k=5$, $k=-4$ и $k=4$.

Ответ: $k=5$, $k=-4$, $k=4$.

23. $y=\dfrac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x}=-\dfrac{(x^2+4)(x+1)}{(x+1)}$

$$\begin{cases} y=-x^2-4 \\ x\neq-1 \end{cases}$$

при $k=5$, прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку

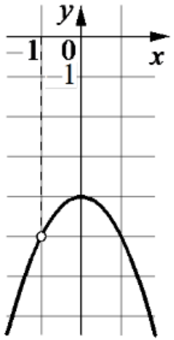


Пример № 1 оценивания задания 22

Постройте график функции $y=\frac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

Преобразуем выражение: $\frac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x}=-x^2-4$ при условии, что $x\neq-1$. Построим график (см. рисунок).



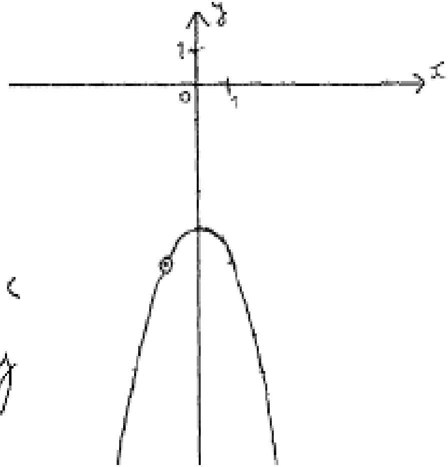
Прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку, если она проходит через точку $(-1;-5)$ или если уравнение $-x^2-4=kx$ имеет один корень. Дискриминант уравнения $x^2+kx+4=0$ равен k^2-16, и он должен быть равен нулю. Получаем, что $k=5$, $k=-4$ и $k=4$.

Ответ: $k=5$, $k=-4$, $k=4$.

23. $y=\frac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x}=-\frac{(x^2+4)(x+1)}{(x+1)}$

$\begin{cases} y=-x^2-4 \\ x\neq-1 \end{cases}$

при $k=5$, прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку



Комментарий:

Не выполнены критерии построения графика функции.

Оценка эксперта:

0 баллов.

Пример № 2 оценивания задания 23

Постройте график функции $y = \dfrac{9x+1}{9x^2+x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: 81.

23

$y = \dfrac{9x+1}{9x^2+x}$

1) $9x^2 + x \neq 0$

$x(9x+1) \neq 0$

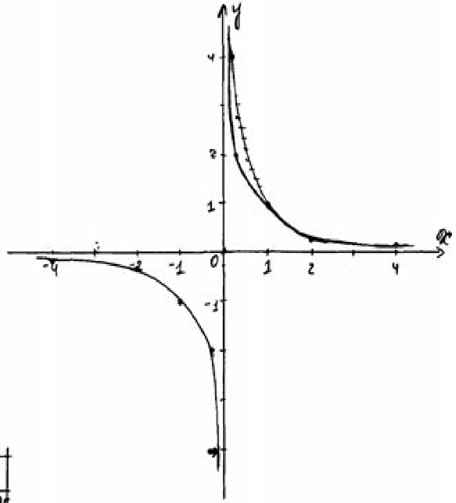
$\boxed{x \neq 0}$ $\quad 9x \neq -1$

$\boxed{x \neq -\frac{1}{9}}$

2) $y = \dfrac{\cancel{(9x+1)}}{x\cancel{(9x+1)}}$

$y = \dfrac{1}{x}$

x	1	2	-1	-2	4	-4
y	1	0,5	-1	-0,5	0,25	-0,25



3) $\dfrac{kx}{1} = \dfrac{1}{x}$

$kx^2 = 1$ Если $y = 1$, а $x^2 = \left(-\frac{1}{9}\right)^2$, то:

$k \times \left(\frac{1}{9}\right)^2 = 1$

$k \times \dfrac{1}{81} = 1$

$\dfrac{k}{81} = \dfrac{1}{1}$

$k = 81$ Ответ: при $k = 81$

Пример № 2 оценивания задания 23

Постройте график функции $y=\dfrac{9x+1}{9x^2+x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: 81.

Комментарий:
График построен неверно – отсутствует выколотая точка.
В соответствии с критериями – 0 баллов.

Оценка эксперта: 0 баллов.

(23) $y=\dfrac{9x+1}{9x^2+x}$

1) $9x^2+x\neq0$

$x(9x+1)\neq0$

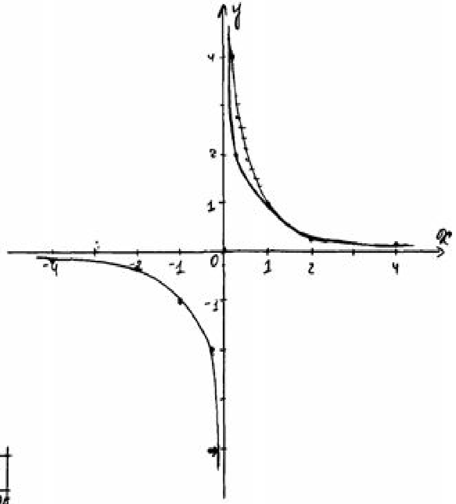
$\boxed{x\neq0}$ $\quad 9x\neq-1$

$\boxed{x\neq-\frac{1}{9}}$

2) $y=\dfrac{\cancel{(9x+1)}}{x\cancel{(9x+1)}}$

$y=\dfrac{1}{x}$

x	1	2	-1	-2	4	-4
y	1	0,5	-1	-0,5	0,25	-0,25



3) $\dfrac{kx}{1}=\dfrac{1}{x}$

$kx^2=1$ Если $y=1$, а $x^2=(-\frac{1}{9})^2$, то:

$k\times\left(\frac{-1}{9}\right)^2=1$

$k\times\frac{1}{81}=1$

$\frac{k}{81}=\frac{1}{1}$

$k=81$ Ответ: при $k=81$

Пример № 3 оценивания задания 23

Постройте график функции $y = \dfrac{9x+1}{9x^2+x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: 81.

№ 23

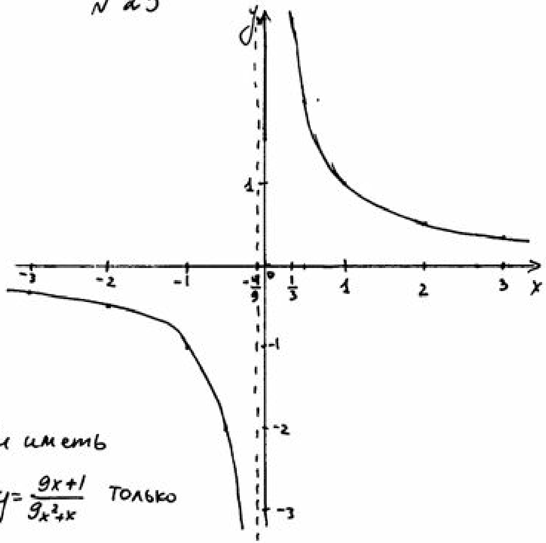
$y = \dfrac{9x+1}{9x^2+x}$

$y = \dfrac{9x+1}{x(9x+1)}$

$D(y) \in R \setminus \{0; -\frac{1}{9}\}$

$y = \dfrac{1}{x}$

$E(y) \in R \setminus \{0; -9\}$



Для того, чтобы иметь с графиком ф-ии $y=\dfrac{9x+1}{9x^2+x}$ только 1 (•) пересечение график ф-ии $y = kx$ должен проходить через выколотую точку, имеющую координаты $(-\frac{1}{9}; -9)$.

Подставим эти значения и найдем k.

$-9 = k \cdot (-\frac{1}{9}) \,|\cdot(-9)$

$k = 81.$

Ответ: 81.

Пример № 3 оценивания задания 23

Постройте график функции $y = \dfrac{9x+1}{9x^2+x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: 81.

Комментарий:

Несмотря на описание, по данному рисунку нельзя судить о верности графика.

Оценка эксперта: 0 баллов.

№ 23

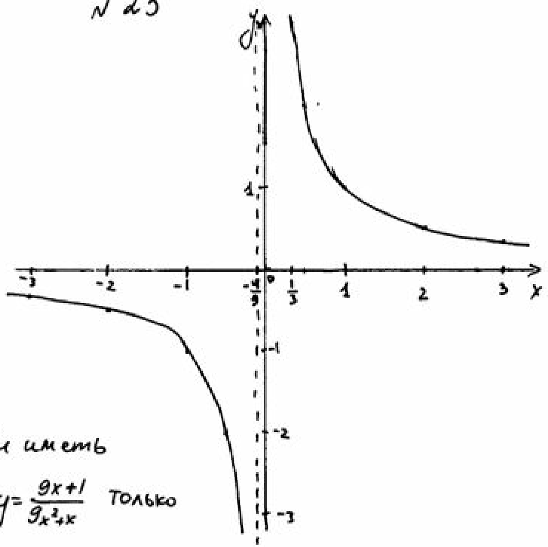
$y = \frac{9x+1}{9x^2+x}$

$y = \frac{9x+1}{x(9x+1)}$

$D(y) \in R \setminus \{0; -\frac{1}{9}\}$

$y = \frac{1}{x}$

$E(y) \in R \setminus \{0; -9\}$



Для того, чтобы иметь с графиком ф-ции $y = \frac{9x+1}{9x^2+x}$ только 1 (•) пересечения график ф-ции $y = kx$ должен проходить через выколотую точку, имеющую координаты $(-\frac{1}{9}; -9)$.

Подставим эти значения и найдем k.

$-9 = k \cdot (-\frac{1}{9}) \,|\cdot(-9)$

$k = 81$.

Ответ: 81.

Пример № 4 оценивания задания 23

23. $y = \frac{9x+1}{9x^2+x} = \frac{\cancel{9x+1}\ 1}{x(\cancel{9x+1})} = \frac{1}{x}$.

Графиком данной функции является гипербола.

ОДЗ:

$9x^2+x \neq 0$.

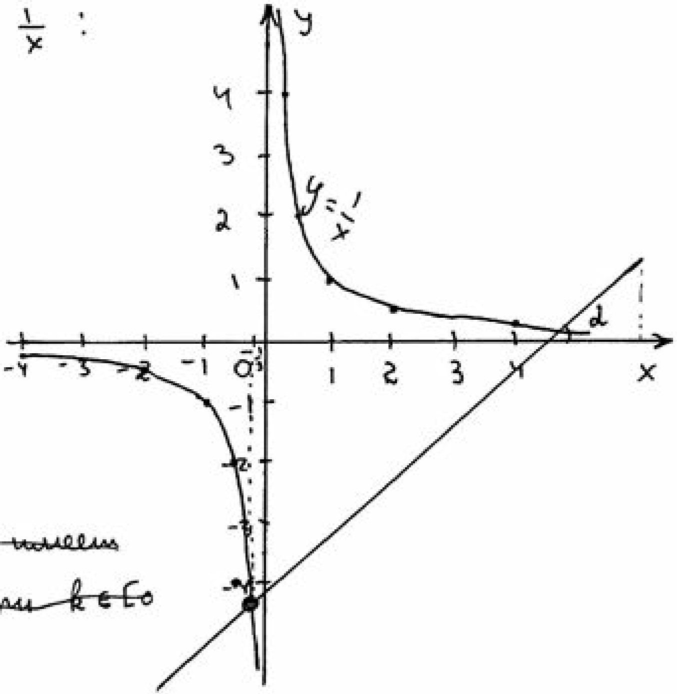
$x(9x+1) \neq 0$

$x \neq 0$ $\quad 9x \neq -1$

$x \neq -\frac{1}{9}$.

Построим график функции $y = \frac{1}{x}$:

x	1	2	4	-1	-2	-4
y	1	0,5	0,25	-1	-0,5	-0,25



~~прямая $y = kx$ имеет одну общую точку при $k \in$~~

Пример № 4 оценивания задания 23

Комментарий:
График построен верно.
Наличие некоторой прямой на графике, не может быть поводом для снижения баллов за построение графика.

Оценка эксперта:
1 балл.

23. $y = \frac{9x+1}{9x^2+x} = \frac{\cancel{9x+1}\ 1}{x(\cancel{9x+1})}, = \frac{1}{x}.$

Графиком данной функции является гипербола.

ОДЗ:

$9x^2+x \neq 0.$

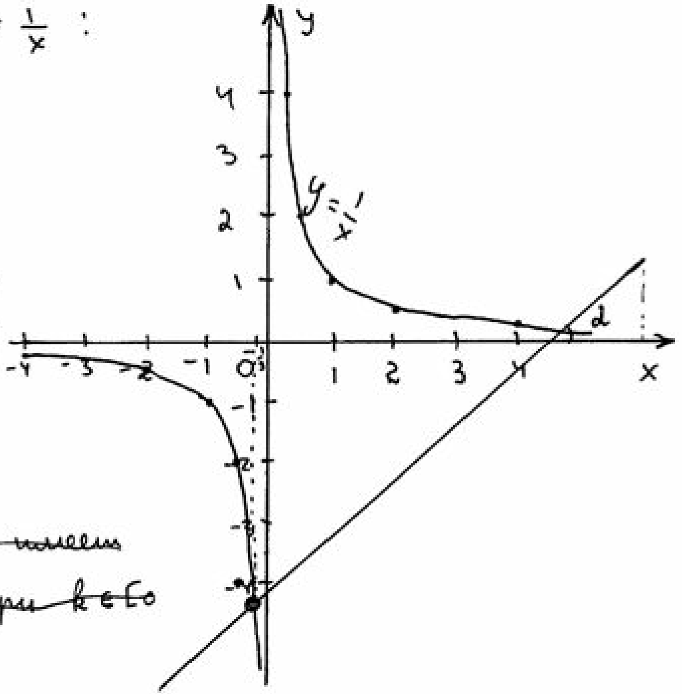
$x(9x+1) \neq 0$

$x \neq 0 \quad 9x \neq -1$

$x \neq -\frac{1}{9}.$

Построим график функции $y = \frac{1}{x}$:

x	1	2	4	-1	-2	-4
y	1	0,5	0,25	-1	-0,5	-0,25



~~[illegible]~~

~~y = kx прямая y = kx имеет одну общую точку при k ∈ 0~~

20 Решите уравнение $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-6=0$.

Решение.

Пусть $t=\frac{1}{x}$, тогда уравнение принимает вид:

$$t^2-t-6=0,$$

откуда $t=-2$ или $t=3$.

Уравнение $\frac{1}{x}=-2$ имеет корень $-\frac{1}{2}$.

Уравнение $\frac{1}{x}=3$ имеет корень $\frac{1}{3}$.

Таким образом, решение исходного уравнения: $x=-\frac{1}{2}$ и $x=\frac{1}{3}$.

Ответ: $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$.

21

Два автомобиля одновременно отправляются в 560-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 10 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 1 ч раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.

Решение.

Пусть скорость первого автомобиля v км/ч, тогда скорость второго автомобиля $v-10$ км/ч. Получаем уравнение:

$$\frac{560}{v-10}-\frac{560}{v}=1;\ 560v-560v+5600=v^2-10v;\ v^2-10v-5600=0,$$

откуда $v=80$.

Ответ: 80 км/ч.

№ 21

$$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-6=0$$

$$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-6=0$$

$$x^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-6\right)=0$$

$$-6x^2-x+1=0$$

$D=1-4\cdot(-6)\cdot1=1+24$

$D=25$

$x_1=\frac{5-(-1)}{-12}=\frac{6}{-12}=-\frac{1}{2}$ $x_2=\frac{-5+1}{-12}=\frac{-4}{-12}=+\frac{4}{12}=+\frac{1}{3}$

Ответ: $x_1=-\frac{1}{2}$; $x_2=+\frac{1}{3}$

№ 22 Первый авт $= x$ км/ч , второй авт. $= x-20$ км/ч

$$\frac{240}{x-20}-\frac{240}{x}=1$$

$$\frac{240x-240x+\overset{4800}{240\cdot20}}{x(x-20)}=1$$

$$x^2-20x-4800=0$$

$\left[\begin{array}{l} x=-60 \text{ км/ч} - \text{не подходит} \\ x=80 \text{ км/ч} \end{array}\right.$

Ответ: 80 км/ч.

20 Решите уравнение $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-6=0$.

Решение.

Пусть $t=\frac{1}{x}$, тогда уравнение принимает вид:

$$t^2-t-6=0,$$

откуда $t=-2$ или $t=3$.

Уравнение $\frac{1}{x}=-2$ имеет корень $-\frac{1}{2}$.

Уравнение $\frac{1}{x}=3$ имеет корень $\frac{1}{3}$.

Таким образом, решение исходного уравнения: $x=-\frac{1}{2}$ и $x=\frac{1}{3}$.

Ответ: $-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}$.

21

Два автомобиля одновременно отправляются в 560-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 10 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 1 ч раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.

Решение.

Пусть скорость первого автомобиля v км/ч, тогда скорость второго автомобиля $v-10$ км/ч. Получаем уравнение:

$$\frac{560}{v-10}-\frac{560}{v}=1;\ 560v-560v+5600=v^2-10v;\ v^2-10v-5600=0,$$

откуда $v=80$.

Ответ: 80 км/ч.

№ 21

$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-6=0$

$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-6=0$

$x^2(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-6)=0$

$-6x^2-x+1=0$

$D=1-4\cdot(-6)\cdot 1=1+24$

$D=25$

$x_1=\frac{5-(-1)}{-12}=\frac{6}{-12}=-\frac{1}{2}$ $x_2=\frac{-5+1}{-12}=\frac{-4}{-12}=+\frac{4}{12}=+\frac{1}{3}$

Ответ: $x_1=-\frac{1}{2}$; $x_2=+\frac{1}{3}$

0 баллов

№ 22

Первый авт. $=x$ км/ч, второй авт. $=x-20$ км/ч

$\frac{240}{x-20}-\frac{240}{x}=1$

$\frac{240x-240x+240\cdot 20}{x(x-20)}=1$ 4800

$x^2-20x-4800=0$

$\left[\begin{array}{l} x=-60 \text{ км/ч — не подходит} \\ x=80 \text{ км/ч} \end{array}\right.$

Ответ: 80 км/ч.

0 баллов

№22

	скор.	время	расстояние
I автом	x км/ч	$\frac{240}{x}$ ч	240 км
II автом	$x-20$ км/ч	$\frac{240}{x-20}$ ч	240 км

$$\frac{240}{x-20}-\frac{240}{x}=1 \qquad \frac{240x-240x-240\cdot 20}{x(x-20)}=1$$

$$x^2-20x=4800$$

$$x^2-20x-4800=0$$

$$\begin{cases} x_1=-60 \text{ (не удв.)} \\ x_2=80 \end{cases}$$

Ответ: 80 км/ч

0 баллов

№22

	Скор.	Время	Расстояние
I автом	x км/ч	$\frac{240}{x}$ ч	240 км
II автом	$x-20$ км/ч	$\frac{240}{x-20}$ ч	240 км

$$\frac{240}{x-20}-\frac{240}{x}=1 \qquad \frac{240x-240x-240\cdot 20}{x(x-20)}=1$$

$$x^2-20x=4800$$

$$x^2-20x-4800=0$$

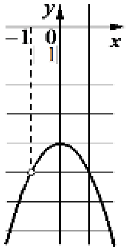
$$\begin{cases} x_1=-60 \text{ (не удв.)} \\ x_2=80 \end{cases}$$

Ответ: 80 км/ч

Постройте график функции $y=\frac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

Преобразуем выражение: $\frac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x}=-x^2-4$ при условии, что $x\neq-1$. Построим график (см. рисунок).



Прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку, если она проходит через точку $(-1;-5)$ или если уравнение $-x^2-4=kx$ имеет один корень. Дискриминант уравнения $x^2+kx+4=0$ равен k^2-16, и он должен быть равен нулю. Получаем, что $k=5$, $k=-4$ и $k=4$.

Ответ: $k=5$, $k=-4$, $k=4$.

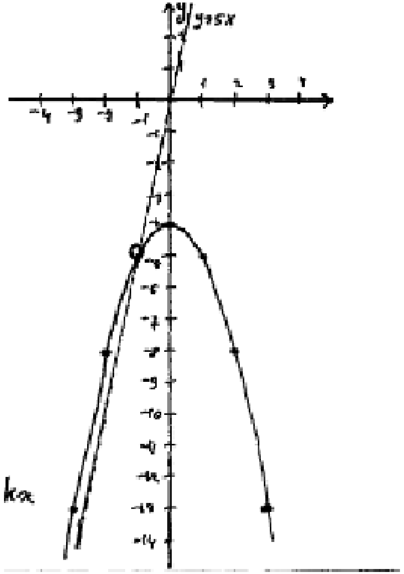
$y=\frac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x}$; ОДЗ: $x\neq-1$

$\frac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x}=\frac{(x^2+4)(x+1)}{-1(x+1)}=-x^2-4$

$y=-x^2-4$ – функция квадратичная, график парабола

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-5	-4	-5	-8

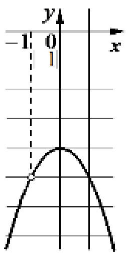
График ф-ции $y=\frac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x}$ имеет с графиком ф-ции $y=kx$ одну общую точку при $k=5$



Постройте график функции $y=\dfrac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

Преобразуем выражение: $\dfrac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x}=-x^2-4$ при условии, что $x\neq-1$. Построим график (см. рисунок).



Прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку, если она проходит через точку $(-1;-5)$ или если уравнение $-x^2-4=kx$ имеет один корень. Дискриминант уравнения $x^2+kx+4=0$ равен k^2-16, и он должен быть равен нулю. Получаем, что $k=5$, $k=-4$ и $k=4$.

Ответ: $k=5$, $k=-4$, $k=4$.

1 балл

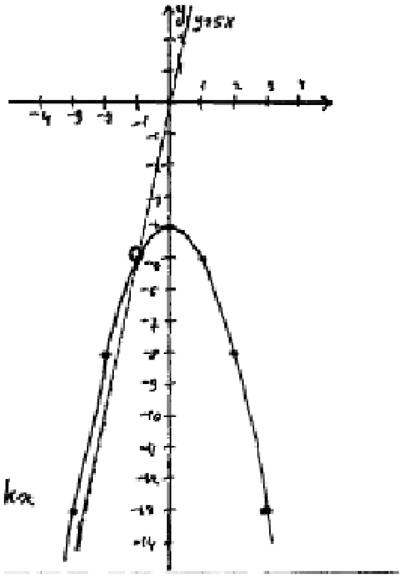
$y=\dfrac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x}$; ОДЗ: $x\neq-1$

$\dfrac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x}=\dfrac{(x^2+4)(x+1)}{-1(x+1)}=-x^2-4$

$y=-x^2-4$ – функция квадратичная, график парабола

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-5	-4	-5	-8

График ф-ции $y=\dfrac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x}$ имеет с графиком ф-ции $y=kx$ одну общую точку при $k=5$



21 $(x-8)^2<\sqrt{3}(x-8)$

$(x-8)(x-8-\sqrt{3})<0$

$y=(x-8)(x-8-\sqrt{3})$

$x-8=0$ $\quad$ $x-8-\sqrt{3}=0$

$x=8$ $\quad$ $x=8+\sqrt{3}$

$x\in(-\infty;8)$ $\quad$ $(x-8)(x-8-\sqrt{3})>0$

$x\in(8;8+\sqrt{3})$ $\quad$ $(x-8)(x-8-\sqrt{3})<0$

$x\in(8+\sqrt{3};+\infty)$ $\quad$ $(x-8)(x-8-\sqrt{3})>0$

Ответ: $x\in(8;8+\sqrt{3})$

2 балла

22.

Дано:
S
$v_1=36$ км/ч
$v_2=99$ км/ч
$S_1=S_2=0,5S$

Найти:
$v_{ср}$ - ?

S - весь путь $\quad$ t_1 - время на участке S_1, t_2 - время на участке S_2

$t_1=\frac{S_1}{v_1}$ $\quad$ $t_2=\frac{S_2}{v_2}=\frac{0,5S}{v_2}$

$v_{ср}=\frac{\text{весь путь}}{\text{все время}}=\frac{0,5S+0,5S}{t_1+t_2}=\frac{S_1+S_2}{t_1+t_2}=$

$=\frac{S}{\frac{0,5S}{v_1}+\frac{0,5S}{v_2}}=\frac{S}{\frac{0,5Sv_2+0,5Sv_1}{v_1\cdot v_2}}=\frac{S\cdot v_1\cdot v_2}{0,5S(v_1+v_2)}=\frac{2Sv_1\cdot v_2}{S(v_1+v_2)}$

$v_{ср}=\frac{2\cdot v_1\cdot v_2}{v_1+v_2}=\frac{2\cdot36\cdot99}{36+99}=\frac{2\cdot36\cdot99}{135}=52,8$ км/ч

Ответ: $v_{ср}=52,8$ км/ч.

2 балла

23 $y=|x^2+2x-3|$ $\quad$ функция квадратичная, графиком является парабола

$x^2+2x-3=0$

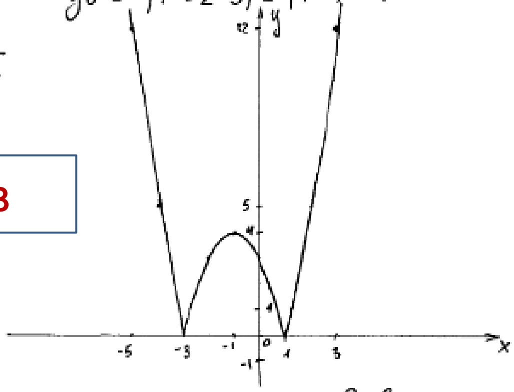
$D=4+12=4^2$

$x=\frac{-2\pm4}{2}=$ 1; -3

$x_в=\frac{-b}{2a}=\frac{-2}{2}=-1$

$y_в=|1^2-2-3|=|1-5|=4$

x	-5	-4	-3	-1	-2	0	1	2	3
y	12	5	0	4	3	3	0	5	12



Ответ: 4

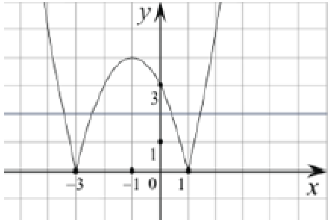
0 баллов

Постройте график функции $y=|x^2+2x-3|$. Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

Решение.

Построим график функции $y=x^2+2x-3$ при $x<-3$ и $x>1$ и график функции $y=-x^2-2x+3$ при $-3\le x\le1$.

График данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс, 0, 2, 3 или 4 общие точки.

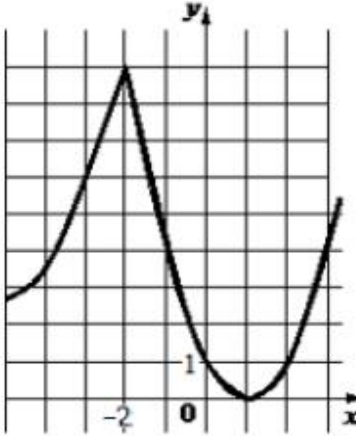


Ответ: 4.

Постройте график функции

$$y=\begin{cases} x^2-2x+1, \text{ если } x\ge -2, \\ -\dfrac{18}{x}, \text{ если } x<-2, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки.



Решение.

Построим график функции $y=-\dfrac{18}{x}$ при $x<-2$ и график функции $y=x^2-2x+1$ при $x\ge -2$.

Прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки при $m=0$ и при $m\ge 9$.

Ответ: 0; $[9;+\infty)$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом: задания высокого уровня сложности (задание 22)

Задание 22. Пример 1. Решение пункта (а):

№ 22 с 2021 года

Решение.

Построим график функции $y = -\frac{18}{x}$.

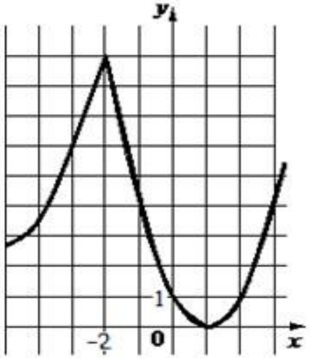
Графиком является гипербола, состоящая из двух ветвей, расположенных во второй и четвертой четвертях.
Так как нужна ветвь гиперболы при $x < -2$, то строим ветвь во второй четверти.

x	-1	-2	-3	-6	-9	-18
y	18	9	6	3	2	1

Построим график функции $y = x^2 - 2x + 1$. Квадратичная функция, графиком является парабола, ветви которой направлены вверх.
Вершина параболы – (1; 0). Так нам нужна часть параболы при при $x \geq -2$, то вычислим координаты точек при $x \geq -2$, учитываю симметрию относительно прямой $x = 1$.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	9	4	1	0	1	4	9

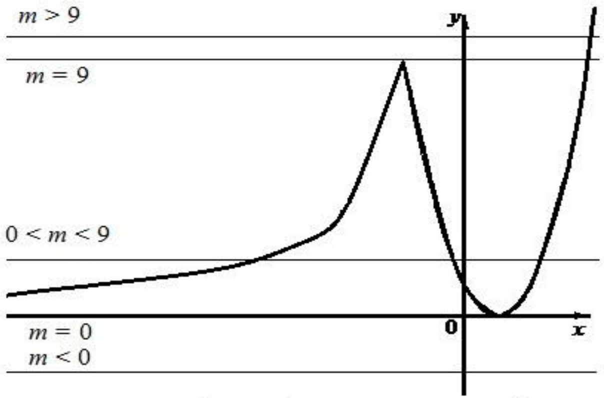
Оставим ветвь гиперболы при $x < -2$ и часть параболы при $x \geq -2$. (В точке $x = -2$ происходит «склейка» графиков.)



Задание 22. Решение пункта (б) (*окончание*):

№ 22 с 2021 года

Построим семейство прямых $y = m$, параллельных или совпадающих с осью Ox.



При $m < 0$ прямая $y = m$ с графиком функции не имеет общих точек;
при $m = 0$ прямая $y = m$ с графиком функции имеет одну общую точку;
при $0 < m < 9$ прямая $y = m$ с графиком функции имеет три общих точки;
при $m = 9$ прямая $y = m$ с графиком функции имеет две общие точки;
при $m > 9$ прямая $y = m$ с графиком функции имеет одну общую точку.

Прямая $y = m$ имеет с графиком одну или две общие точки при $m = 0$ и при $m \geq 9$.

Ответ: 0; $[9; +\infty)$.

Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом: задания высокого уровня сложности (задание 22)

Задание 22.

№ 22 с 2021 года

23 Постройте график функции

$$y=\begin{cases}x^2-2x+1, \text{ если } x\ge -2,\\ -\dfrac{18}{x}, \text{ если } x<-2,\end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Ответ: 0; $[9;+\infty)$.

(23) $y\begin{cases}x^2-2x+1 & (x\geqslant -2)\\ -\frac{18}{x} & (x<-2)\end{cases}$

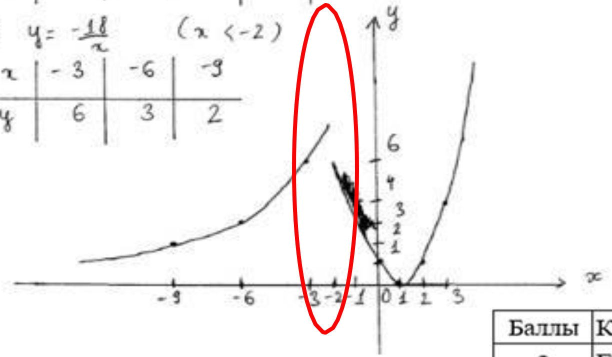
$y=x^2-2x+1 \quad (x\geqslant 2)$

$x_0=\frac{-b}{2a}=\frac{2}{2}=1 \Rightarrow y_0=1^2-2\cdot 1+1=1-2+1=0$

x	-1	0	1	2	3
y	4	1	0	1	4

$y=-\frac{18}{x} \quad (x<-2)$

x	-3	-6	-9
y	6	3	2



Рассмотрим на график.

При $x=-2$ прямая $y=m$ имеет с графиком две общие точки

$x=-2 \Rightarrow m=y=9$

Ответ: 9

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

0 баллов

Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом: задания высокого уровня сложности (задание 22)

Задание 22.

№ 22 с 2021 года

$y = \begin{cases} x^2-2x+1 \ ; \text{при} \ x \geq -2 \\ -\frac{18}{x} \ ; \text{при} \ x < -2 \end{cases}$

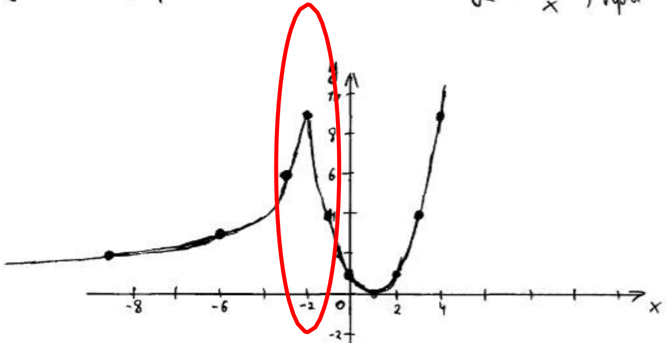
$-\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$ $\quad y = 1-2+1=0$

x	-2	-1	0	1	2
y	9	4	1	4	9

$y = x^2 - 2x + 1$; при $x \geq -2$

x	-9	-6	-3	
y	2	3	6	

$y = -\frac{18}{x}$, при $x < -2$



Ответ: при $m = 0$ и $m \in [9; +\infty)$

23 Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, \text{ если } x \geq -2, \\ -\frac{18}{x}, \text{ если } x < -2, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Ответ: 0; $[9; +\infty)$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

0 баллов

Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом: задания высокого уровня сложности (задание 22)

Задание 22.

№ 22 с 2021 года

23 Постройте график функции

$$y=\begin{cases} x^2-2x+1, & \text{если } x\geq -2,\\ -\dfrac{18}{x}, & \text{если } x<-2,\end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Ответ: $0;\ [9;+\infty)$.

23. $D(y): x \in (-\infty;0);(0;+\infty)$.

$y = x^2 - 2x + 1$

квадратичная функция

график - парабола

ветви вверх.

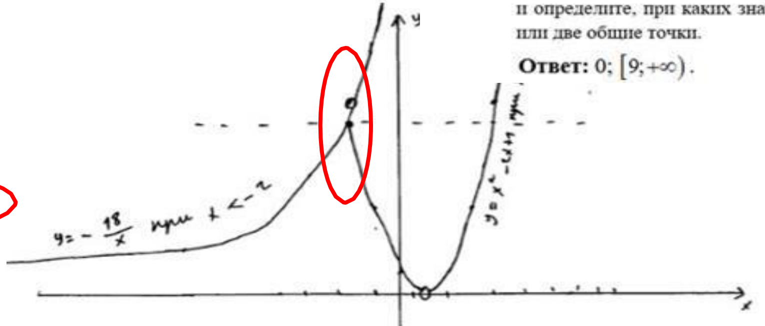
$x_в = \frac{2}{2} = 1$

$y_в = 1 - 2 + 1 = 0$

$y = -\frac{18}{x}$

график - гипербола.

x	1	18	2	3	...
y	-18	-1	-9	-2	...



Прямая $y = m$ имеет с графиком одну или две общие точки при $m = 8$ или $m = 0$.

Ответ: 0; 8

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

0 баллов

Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом высокого уровня сложности (задание 22)

№23

Решение

Построим график функции $y=|x^2-4x+3|$ Графиком является парабола, $a=1$ (ветви направлены вверх)

Чтобы построить график функции $y=|f(x)|$ можно построить параболу, часть графика, лежащую выше оси OX сохранить, а часть лежащую ниже оси OX отобразить над осью OX.

Найдём вершину параболы $x_0; y_0$ $x_0=\frac{-b}{2a}$. $x_0=\frac{4}{2}=2$

$y_0=2^2-8+3=-1$ $(2;-1)$ – вершина

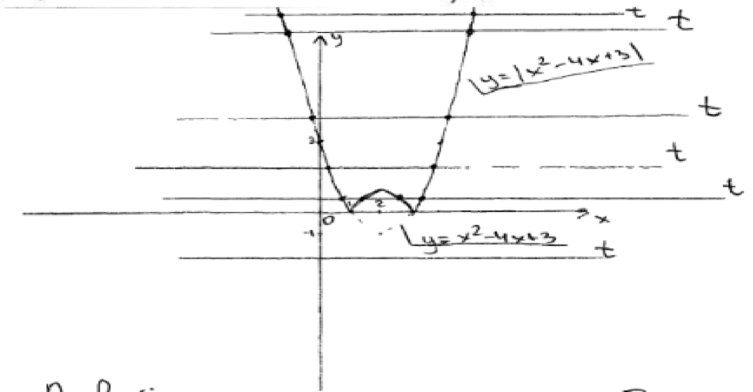
OY: $0^2-4\cdot0+3=3$ $(0;3)$

OX: $x^2-4x+3=0$

$D=16-12=4$

$x_1=\frac{4+2}{2}=3$ $x_2=\frac{4-2}{2}=1$ $(3;0);(1;0)$

$y(5)=5^2-5\cdot4+3=25-20+3=8$ $(5;8)$



Проведём прямые, параллельные оси абсцисс. Назовём их прямая t и отметим её точки пересечения с графиком $y=|x^2-4x+3|$

Ответ: 4 общих точки

Постройте график функции

$$y=|x^2-4x+3|.$$

Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

2 балла

В презентации использованы материалы *Семенова Андрея Викторовича*, к. пед. н, ведущего научного сотрудника ФГБНУ «ФИПИ» с курсов повышения квалификации

«Подготовка экспертов для работы в региональной предметной комиссии при проведении итоговой аттестации по общеобразовательным программам основного общего и среднего общего образования»